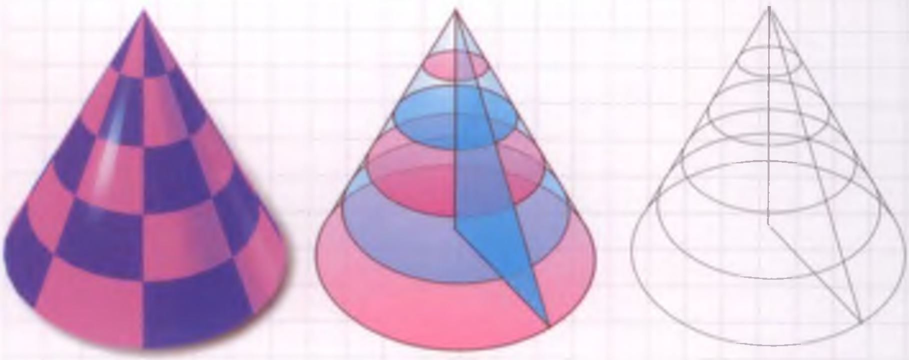
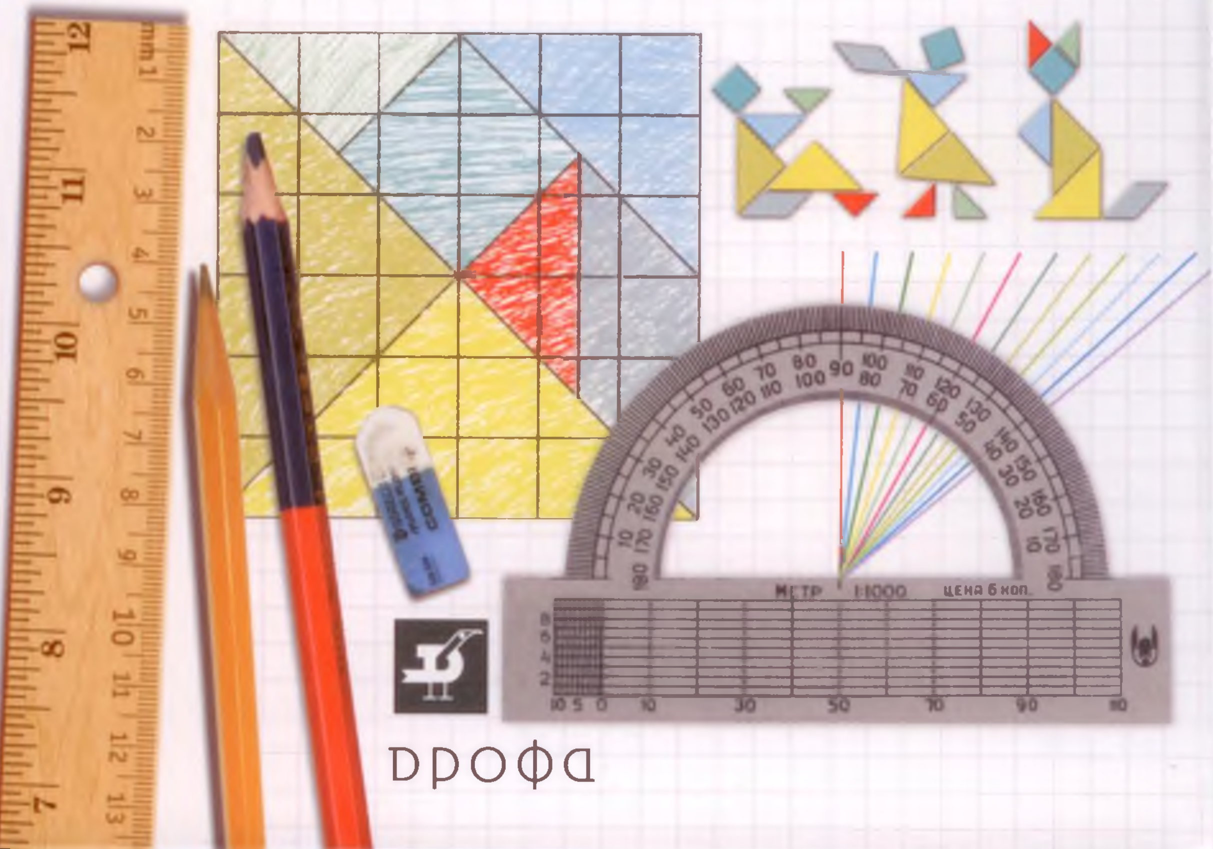
И. Ф. Шарыгин
Л. Н. Ерганжиева

Математика
Наглядная геометрия

5·6 классы





ДРОФА

И. Ф. Шарыгин
Л. Н. Ерганжиева

Математика
Наглядная геометрия
5·6
классы

Учебник

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

2-е издание, стереотипное

Москва
ДРОФА
2015

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
Ш26

Шарыгин, И. Ф.
Математика : Наглядная геометрия. 5—6 кл. : учебник / И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева. — 2-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2015. — 189, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-358-15038-6

Содержание учебника направлено на развитие геометрической интуиции, пространственного воображения, изобразительных навыков учащихся. Включение в учебник интересных задач, исторических сведений, примеров влияния геометрии на архитектуру и искусство, а также головоломок, лабиринтов, орнаментов и др. способствует развитию интереса к изучению геометрии. Этому же способствуют стиль изложения и художественное оформление учебника.

Учебник может быть использован с любым систематическим курсом математики для 5—6 классов основного общего образования.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721

Учебное издание

Шарыгин Игорь Федорович, **Ерганжиева** Лариса Николаевна

МАТЕМАТИКА
НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
5—6 классы

Учебник

Зав. редакцией *Е. Н. Тихонова*. Ответственный редактор *Т. С. Зельдман*
Редактор *Л. В. Туркестанская*. Оформление *А. В. Кузнецов*
Макет *М. Г. Мицкевич*. Художественный редактор *М. Г. Мицкевич*
Компьютерная верстка и графика *О. И. Колотова*
Технический редактор *В. Ф. Козлова*. Корректор *Н. С. Соболева*

Сертификат соответствия
№ РОСС RU. AE51. H 16602.
6+

Подписано к печати 06.04.15. Формат 70 × 100 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15,48. Тираж 6000 экз. Заказ № 6843.

ООО «ДРОФА». 127254, Москва, Огородный проезд, д. 5, стр. 2.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127254, Москва, а/я 19. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127254, Москва, Огородный проезд, д. 5, стр. 2. Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Сайт ООО «ДРОФА»: www.drofa.ru
Электронная почта: sales@drofa.ru
Тел.: 8-800-200-05-50 (звонок по России бесплатный)

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО "Тверской полиграфический комбинат". 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34, Телефон/факс (4822)44-42-15
Home page - www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) - sales@tverpk.ru

Глядя на мир, нельзя не удивляться.
Козьма Прутков

Дорогой читатель!

Книга, которую вы только что открыли, не учебник. Во всяком случае, она не похожа на обычный учебник. Эта книга введет вас в мир геометрии. Впрочем, это не совсем так. На самом деле этот мир окружает вас с самого рождения. Ведь все, что мы видим вокруг (прямоугольник окна, загадочный узор снежинки, дома-параллелепипеды, капля воды, велосипедная шина, узел на веревке, линия, по которой движется брошенный камень), так или иначе относится к геометрии, ничто не ускользает от ее внимательного взгляда.

Мы хотели бы, чтобы эта книга помогла вам идти по миру геометрии с широко открытыми глазами, научила внимательно смотреть вокруг и видеть красоту обычных вещей, смотреть и думать, думать и делать выводы.

Прежде всего эту книгу надо не просто читать, но и понимать, перечитывая трудные места, внимательно рассматривать рисунки. Надо постоянно решать задачи. Не отчаивайтесь, если задача кажется трудной, не удается чертеж. Не торопитесь заглянуть в ответ, подумайте еще немного, попытайтесь сделать еще несколько рисунков. Если все-таки что-то не получается — загляните в ответ. Разберитесь в приведенном там решении. И мы уверены: прекрасный мир геометрии постепенно пойдет вам навстречу, начнет открывать свои тайны, и вы полюбите геометрию на всю жизнь.

1 Первые шаги в геометрии

«Я думаю, что никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг — геометрия». Эти слова, сказанные великим французским архитектором Ле Корбюзье в начале XX в., очень точно характеризуют и наше время. Мир, в котором мы живем, наполнен геометрией домов и улиц, гор и полей, творениями природы и человека. Лучше ориентироваться в нем, открывать новое, понимать красоту и мудрость окружающего мира поможет вам эта книга.

Геометрия зародилась в глубокой древности. Строя жилища и храмы, украшая их орнаментами, размечая землю, измеряя расстояния и площади, человек применял свои знания о форме, размерах и взаимном расположении предметов, полученные из наблюдений и опытов. Почти все великие ученые древности и средних веков были выдающимися геометрами. Древнегреческий философ Платон, проводивший беседы со своими учениками в роще Академа (Академ — древнегреческий мифологический герой, которого, по преданию, похоронили в священной роще недалеко от Афин), откуда и пошло название «академия», одним из девизов своей школы провозгласил: «Не знающие геометрии не допускаются!» Было это примерно 2400 лет назад. Из геометрии вышла наука, которая называется математикой.

На занятиях по наглядной геометрии, где вы встретитесь с интересными головоломками и занимательными задачами, бумажными человечками и геометрическими играми, вашими постоянными спутниками будут наблюдение и опыт. Усидчивость и аккуратность при выполнении заданий помогут вам в достижении цели. Они так же важны, как и смекалка и находчивость при решении задач.

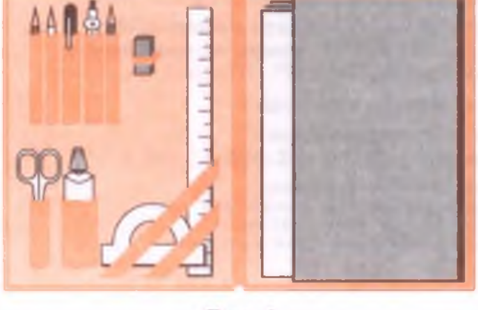


Рис. 1

В ходе занятий часто будут встречаться задания начертить какую-либо фигуру, измерить какие-либо величины. Все необходимое для выполнения этих заданий вы видите на рисунке 1. Это линейка, циркуль и транспортир, т. е. измерительные и чертежные инструменты.

С помощью линейки можно:

— проводить прямые линии;

— измерять отрезки;

— строить отрезки заданной длины.

Линейку без делений мы назовем математической линейкой. С ее помощью можно лишь проводить прямые линии.

Циркуль позволяет:

— строить окружности;

— сравнивать отрезки по величине (рис. 2);

— откладывать на прямой отрезки заданной длины.

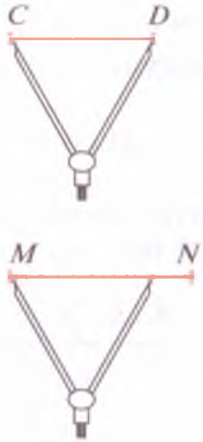


Рис. 2

Транспортир (рис. 3) используют для измерения и построения углов. Шкала транспортира представляет полуокружность, разделенную на 180 частей.

Одна часть называется ГРАДУСОМ. Шкала транспортира содержит 180° (знак ° заменяет слово «градусов»). В градусах измеряют углы и дуги окружностей.

Рис. 3

Будьте внимательны! На транспортире две шкалы! Если сторона угла совпадает с правой половиной основания транспортира, то используют внутреннюю шкалу, а если с левой половиной, то внешнюю!

Эта стрелочка покажет самое важное, что нужно запомнить.

Мы начнем с нескольких задач, внешне очень различных, но все они так или иначе относятся к геометрии.

Итак, в дорогу! Счастливого пути!

1. Сложите шесть спичек так, чтобы образовалось четыре треугольника (сторона каждого треугольника должна быть равной длине спички).
2. Разрежьте квадрат на четыре равные части разными способами; на пять равных частей.

3. Можно ли нарисовать открытый конверт (рис. 4), не отрывая карандаша от бумаги и не проводя более одного раза никакой линии? А закрытый (рис. 5)?

4. Как разрезать фигуру, показанную на рисунке 6, на две одинаковые части?

5. Арбуз разрезали на четыре части и съели. Получилось пять корок. Может ли такое быть?

6. Как вырезать из целого листа бумаги фигуру, изображенную на рисунке 7? (Приклеивать части нельзя.)

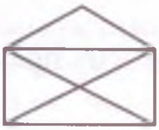


Рис. 4

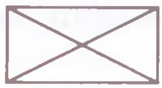


Рис. 5

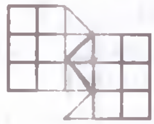


Рис. 6

Рис. 7

7. Четыре страны имеют форму треугольников. Как расположены страны одна относительно другой, если у каждой из них есть общие границы с тремя другими? Нарисуйте.

8. Деревянный куб покрасили снаружи краской, каждое его ребро разделили на пять равных частей, после чего куб распилили так, что получились маленькие кубики, у которых ребро в пять раз меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков? У скольких кубиков окрашены три грани? две грани? только одна грань? Сколько осталось неокрашенных кубиков?

2 Пространство и размерность

Однажды известный математик пытался объяснить своему знакомому поэту, что такое пространство. Тот долго его слушал, а в конце заметил: «Это все не так. Я знаю, что пространство голубое и по нему летают птицы!» К сожалению, математики смотрят на пространство более прозаично.

Геометрия изучает форму и взаимное расположение фигур в пространстве. Это то пространство, которое окружает нас. Посмотрим вокруг.

Мы живем в мире трех измерений.

Что это значит? Представим, что перед нами стоит дом (рис. 8) и мы хотим описать его, т. е. объяснить, какой он. Мы говорим: «Этот дом длиной в три подъезда, шириной в два окна, высотой в шесть этажей». В общем, этого вполне достаточно, чтобы представить дом. Нам понадобилось задать три величины — длину, ширину и высоту. Эти три измерения мы используем ежедневно, говоря об окружающих нас предметах: высота дерева, длина дороги, ширина тротуара...

Все предметы (тела) в окружающем нас мире имеют три измерения, хотя далеко не у всех можно указать длину, ширину, высоту. Как называется геометрическое тело, полностью описываемое тремя измерениями — длиной, шириной и высотой? Это ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД. Вернее, прямоугольный параллелепипед. Все его грани являются прямоугольниками. Многие предметы имеют форму параллелепипеда. Это, например, ящик, кирпич, брус. Параллелепипед можно считать символом нашего пространства. Правда, когда мы говорим «длина, ширина и высота», то имеем в виду измерения параллелепипеда, расположенного конкретным образом на земле (или на столе). Высотой в этом случае мы называем измерение, направленное вертикально вверх от земли. Если мы не знаем, как расположен параллелепипед, то говорить о длине, ширине и высоте было бы не совсем верно. Лучше просто — три измерения. А теперь представим, что высота исчезла. Весь мир стал плоским, как лист бумаги, остались только ДВА ИЗМЕРЕНИЯ — длина и ширина.

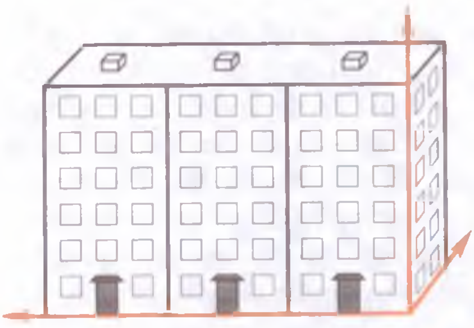


Рис. 8

Математики говорят, что плоскость является ДВУХМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ. Какие геометрические фигуры могут «жить» в этом мире? Это, например, квадрат, отрезок, круг. А что еще? Вообразите себя плоским. Вокруг вас живут треугольники, окружности, квадраты, отрезки и другие плоские фигуры. Расскажите, как вам

это представляется, какими вы их видите? А что происходит, если они движутся, поворачиваются? Что вы увидите, если плоскость, в которой вы находитесь, пересечет шар, движущийся сквозь плоскость, как сквозь стену?

Продолжим мысленные эксперименты. Уберем теперь и ширину. Останется ОДНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО с одним измерением — ДЛИНОЙ. Этот мир полностью лежит на прямой; жители его — отрезки, лучи, точки. Какими они видят друг друга?

В удивительном мире геометрии существует и фигура, которая не имеет измерений — длины, ширины, высоты. Вы догадались, что это? Конечно, это ТОЧКА.

Схема, приведенная выше, показывает, как увеличение числа измерений влечет за собой изменение и усложнение геометрических фигур.

Разделите пополам тетрадный лист вертикальной чертой, слева напишите названия тех фигур (или начертите их), которые можно поместить в плоскости, а справа те, которые нельзя. Сможете ли вы указать по 10 фигур в каждой колонке?

С давних пор люди пытались объемные тела изобразить на плоскости так, чтобы их сразу можно было отличить от плоских, чтобы чувствовалась глубина пространства. Была разработана научная теория перспективы, позволяющая «обмануть» зрение. Картина венгерского художника Виктора Вазарели «Изучение перспективы» — прекрасный тому пример (рис. 9). На ней видно, как линии, уходящие вглубь, сходятся в одной точке, а фигура, находящаяся дальше от нас, изображается в виде фигуры меньших размеров. С по-

Рис. 9. *В. Вазарели*. Изучение перспективы

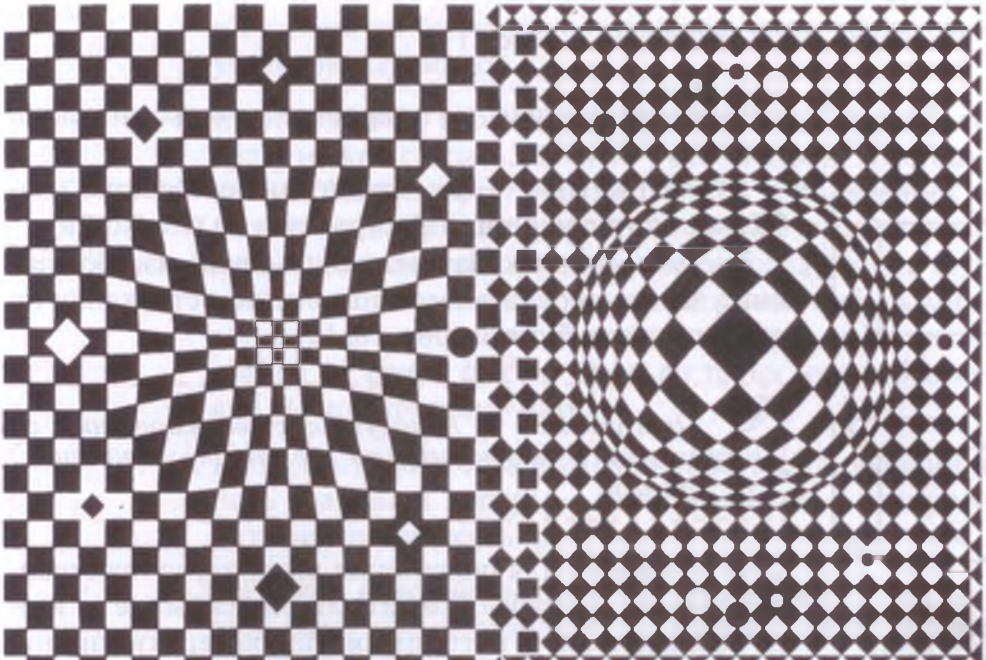


Рис. 10

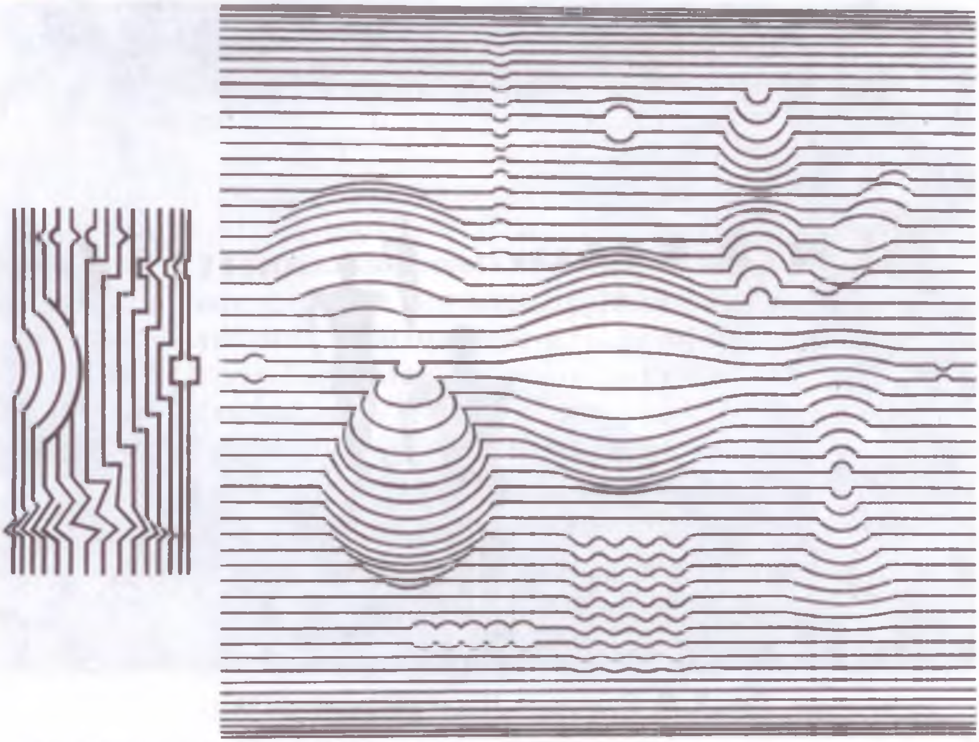
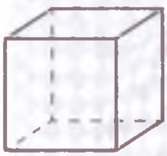


Рис. 11

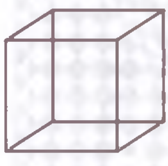
нятием перспективы вы подробнее познакомитесь на уроках рисования.

ПЕРСПЕКТИВА — не единственное средство изображения трехмерного пространства на плоскости.

Рассмотрите, как Вазарели с помощью изгибов линий удалось передать вмятины, выпуклости, капли на плоском листе бумаги (рис. 10, 11).



а)

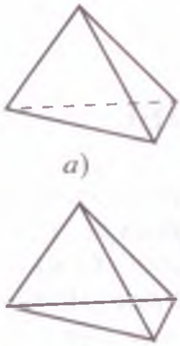


б)

Рис. 12

Придумайте и нарисуйте свою картинку с кажущимися выпуклостями и вмятинами на листе бумаги.

В геометрии для облегчения восприятия пространства договорились изображать линии, скрытые от взора наблюдателя, пунктирными. Например, куб принято изображать так, как на рисунке 12, *а*. Если же мы нарисуем его без пунктирных линий (рис. 12, *б*), то можно усомниться, что это куб. Может, это просто набор сложенных определенным образом треугольников и четырехугольников? Даже если мы и видим куб, то всякий раз иначе видим, какая грань впереди, а какая сзади.



а) *б)*

Рис. 13

Пирамиду изобразим так, как на рисунке 13, *а*. А вот на рисунке 13, *б* изображен четырехугольник, противоположные вершины которого соединены отрезками. Эти отрезки называются ДИАГОНАЛЯМИ. Пунктирная линия на рисунке 13, *а* делает этот рисунок объемным и позволяет отличать изображение пирамиды от четырехугольника с диагоналями. Научитесь изображать на клетчатой бумаге куб и пирамиду.

1. Сколько одинаковых квадратов надо взять, чтобы из них можно было сложить в два раза больший квадрат? Сколько одинаковых кубиков надо для составления в два раза большего куба?

2. Треугольник можно разделить на четыре равных треугольника. Как? Если от треугольной пирамиды отрезать четыре ее уголка, проведя разрезы через середины ребер, то будет ли оставшаяся часть также треугольной пирамидой?

3. Если известно, сколько у многоугольника вершин, то сразу можно сказать, сколько у него сторон. Их столько же. Например, у пятиугольника пять вершин и пять сторон. Для многогранников (объемных тел) это не так. Как известно, у параллелепипеда восемь вершин и шесть граней. Придумайте какой-нибудь многогранник, у которого также восемь вершин, но число граней не равно шести. Сколько таких многогранников вы можете придумать?

4. Изобразите многогранник, у которого пять вершин и пять граней. А теперь — многогранник, у которого пять вершин и шесть граней.

5. На какое самое большое число частей можно разрезать блин тремя разрезами? Сколько частей может получиться при трех разрезах каравая?

3 Простейшие геометрические фигуры

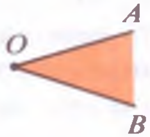
Так же как самое большое здание складывается из маленьких кирпичей, так и сложные геометрические фигуры составляются из простейших геометрических фигур. О них вы узнаете из этого раздела. Здесь также будут рассмотрены наиболее часто используемые геометрические инструменты — линейка, циркуль, транспортир.

Итак, простейшие фигуры и их обозначения.

Точка A.

Прямая a. Ее еще можно назвать прямой MN. Отрезок AB — это часть прямой между двумя точками A и B (из прямой как бы вырезали кусочек).
Точки A и B — концы отрезка AB.

Луч OM — это часть прямой по одну сторону от некоторой точки — начала луча (похоже на луч фонарика, точка O — как лампочка фонарика). Точка O — начало луча.



Угол AOB — это часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки. Точка O — общее начало лучей OA и OB, точка O — вершина угла.

В обозначении угла вершина всегда ставится в середине: угол *AOB*. Лучи *OA* и *OB* — стороны угла.

Начертите в тетради точку, прямую, отрезок, луч и угол. Обозначьте их.

На рисунке 14 *изображены три прямые и точки на них. Найдите три отрезка, три луча, три угла. Запишите их. Сколько различных лучей вы можете назвать?*

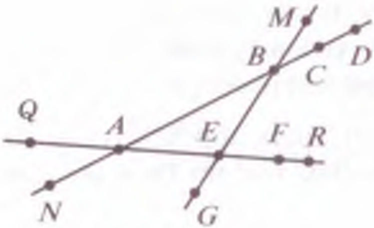


Рис. 14

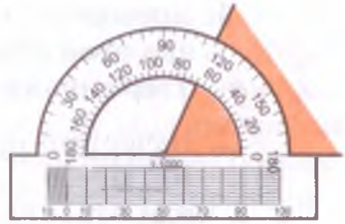


Рис. 15

В начальных классах вы научились измерять отрезки. А как измерить угол?

Приложите транспортир к углу (рис. 15) так, чтобы:

а) вершина угла совпала с черточкой — серединой основания транспортира;

б) одна сторона угла совпала с основанием транспортира, соответствующим 0°.

Вторая сторона угла указывает на шкале угол в градусах.

Среди всех углов выделяется ПРЯМОЙ угол (рис. 16, *б*). Прямой угол содержит 90°. По отношению к нему остальные углы делятся на две группы: ОСТРЫЕ углы (меньше 90°, рис. 16, *а*) и ТУПЫЕ углы (больше 90°, рис. 16, *в*). Угол, равный 180°, называется РАЗВЕРНУТЫМ (рис. 17).

Измерьте углы в четырехугольнике ABCD (рис. 18).

Рис. 16

Рис. 17

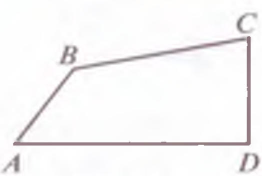


Рис. 18

1. Проведите через одну точку три прямые. Сколько при этом образовалось углов (рассматриваются углы с вершиной в точке пересечения прямых)?

2. Начертите при помощи транспортира углы, равные 10°, 20°, 30°, ..., 170°, причем так, чтобы одна сторона у всех углов была общей.

3. Постарайтесь при помощи одной линейки (на глазок) построить углы, равные 30°, 45°, 80°, 90°, 120°. А теперь измерьте транспортиром построенные углы. На сколько вы ошиблись?

4. На плоскости даны две пересекающиеся прямые. Один из углов между ними равен 28°. Сделайте чертеж. Измерьте остальные углы. Что получится, если угол между прямыми равен 33°?

Проведенные измерения и наблюдения приведут вас к следующему выводу:

При пересечении двух прямых образуются две пары равных углов. Это — пары вертикальных углов. Стороны одного из них являются продолжением сторон другого угла.

Назовите пары вертикальных углов, изображенных на рисунке 19.

Вертикальные углы не имеют общих сторон. У них общая вершина.

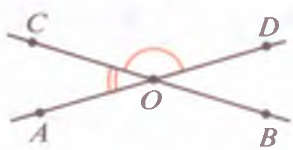


Рис. 19

На рисунке 19 есть также пары углов с общей стороной. Это, например, углы AOC и DOC. Сторона OC у них общая, а стороны OA и OD составляют развернутый угол. Такие два угла называются СМЕЖНЫМИ. Подумайте, чему равна сумма смежных углов.

5. Изобразите четырехугольник, у которого три угла прямые. Как вы думаете, будет ли и четвертый угол прямым?

6. Нарисуйте квадрат и проведите его диагональ. Как вы думаете, какие углы образует диагональ со сторонами квадрата? Проверьте свою интуицию измерением. Можете ли вы объяснить, почему угол именно такой? А если взять квадрат других размеров — больше или меньше, — изменится ли угол между сторонами квадрата? Вырежьте из бумаги квадрат и сложите его вдвое по диагонали. Что вы заметили?

7. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в 9 ч, 10 ч, 6 ч, 5 ч, 11 ч 30 мин?

8. На угол в 10° смотрят через увеличительное стекло с десятикратным увеличением. Чему равен угол, наблюдаемый сквозь стекло?

В задании 6 вы складывали квадрат по диагонали. Половинки квадрата (треугольники) совпали, т. е. диагональ квадрата разделила его на две равные части. И угол квадрата разделился пополам. Диагональ квадрата является БИССЕКТРИСОЙ угла. Биссектриса угла — это луч, выходящий из его вершины и делящий угол на два равных.

9. Начертите на листе бумаги любой угол и вырежьте его по сторонам, оставив бумагу между сторонами угла неразрезанной. Как вы думаете, можно ли без карандаша и линейки построить биссектрису этого угла? Как это сделать? Для всякого ли угла можно построить биссектрису?

10. Начертите в тетради угол, равный 60°. Какой угол образует биссектриса этого угла с его сторонами? Проведите ее.

11. Начертите в тетради какой-нибудь угол, проведите в нем на глаз биссектрису и проверьте измерением. Потренируйтесь таким образом в развитии глазомера.

12. На плоскости проведены три луча OA, OB, OC. Чему может равняться угол AOC, если: а) $\angle AOB = 70°$, $\angle BOC = 50°$; б) $\angle AOB = 102°$, $\angle BOC = 84°$?

4 Конструирование из Т

Смена деятельности — лучший отдых. Задания этого раздела позволят вам отвлечься от измерений и построений и поиграть.

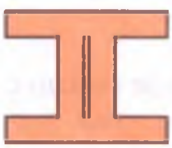


Рис. 20

Рис. 21

Посмотрите на фигуру, изображенную на рисунке 20. Как ее назвать? Это не квадрат, не прямоугольник... Как описать эту фигуру человеку, который ее не видит? Можно сделать так: это буква Н с двумя перекладинами, лежащая на боку. Придумайте и запишите в тетрадь еще два описания этой фигуры человеку, который не видит ее, чтобы он понял, что нарисовано. А теперь попробуйте описать фигуру, изображенную на рисунке 21. Она похожа на букву Т. Так и будем ее называть — буква Т.

1. Составьте конструкцию из трех-четырех букв Т и, не показывая ее соседу по парте, словесно опишите. Ваша задача — описать фигуру так, чтобы ваш приятель смог ее нарисовать. Если получилось, поменяйтесь ролями: теперь он объясняет, а вы рисуете.

2. На фигуры кто-то вылил белую краску (рис. 22). Известно, что фигуры состоят из букв Т. Восстановите их вид.

3. Составьте из букв Т большую композицию. Это может быть орнамент или какой-нибудь рисунок.

а) *б)*

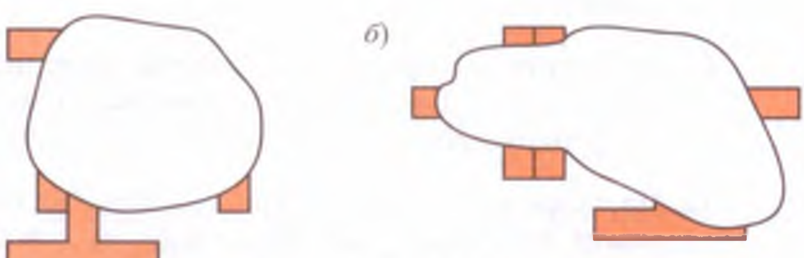
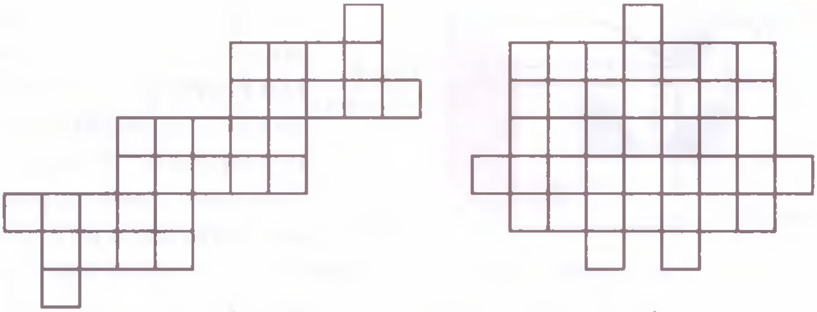


Рис. 22

Рис. 23



а) *б*)

Рис. 24

4. Можно ли куб завернуть в букву Т в один слой? Если да, то нарисуйте эту букву. Укажите ее размеры, если ребро куба равно 1 см.

5. Имеется кусок клетчатой бумаги размером 10 × 10 клеток. Вырежьте из нее как можно больше букв Т такой формы, как на рисунке 23.

6. Разрежьте фигуры (рис. 24, *а*, *б*) на буквы Т такой же формы, как в задании 5.

5 Куб и его свойства

Пожалуй, трудно найти человека, которому бы не был знаком куб. Ведь кубики — любимая игра малышей. Кажется, что мы о кубе знаем все. Но так ли это? Что вы можете о нем рассказать, какие его свойства вам известны?

Куб является представителем большого семейства многогранников. С некоторыми из многогранников вы уже встречались. Это пирамида, прямоугольный параллелепипед. Знакомство с другими, например октаэдром, додекаэдром, ожидает вас впереди.

Многогранники при всем различии имеют ряд общих свойств. Например, поверхность каждого из них состоит из плоских многоугольников, которые называются ГРАНЯМИ МНОГОГРАННИКА. Два соседних

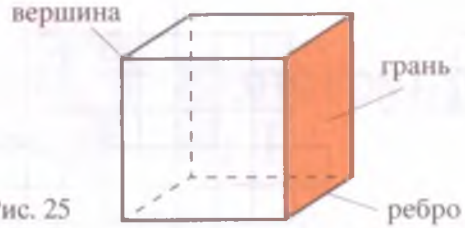


Рис. 25

плоских многоугольника имеют общую сторону — РЕБРО МНОГОГРАННИКА. Концы ребер являются ВЕРШИНАМИ МНОГОГРАННИКА. Рассмотрите изображение куба на рисунке 25, перечертите его в тетрадь и подпишите названия основных элементов куба. Запомните и в дальнейшем используйте эти термины! Решение следующих задач и выполнение заданий позволит вам обнаружить некоторые свойства куба.

1. Возьмите в руки кубик из любого материала. Лучше, если он будет не очень маленьким. Ваша цель — исследовать его, т. е. обнаружить путем измерения, наблюдения, подсчета как можно больше свойств куба. Обнаруженные свойства запишите в тетрадь. Обсудите в классе полученные результаты. Дополните, если это понадобится, свой список свойств куба теми свойствами, которые заметили ваши одноклассники. (Как склеить куб, сказано в задании 2.)

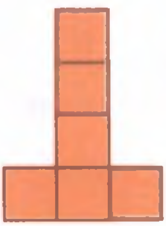


Рис. 26

2. Перечертите на клетчатую бумагу фигуру (рис. 26) и вырежьте ее (сторона каждого квадрата 4 см). Сверните из нее куб, склейте его. Вырезанная фигура называется РАЗВЕРТКОЙ КУБА. Подумайте, почему она так названа. Из чего она состоит? Придумайте еще несколько разверток куба и начертите их в тетради.

3. Из фигур, изображенных на рисунке 27, выберите те, которые являются развертками куба, и перенесите их в тетрадь. Объясните, почему вы выбрали именно их.

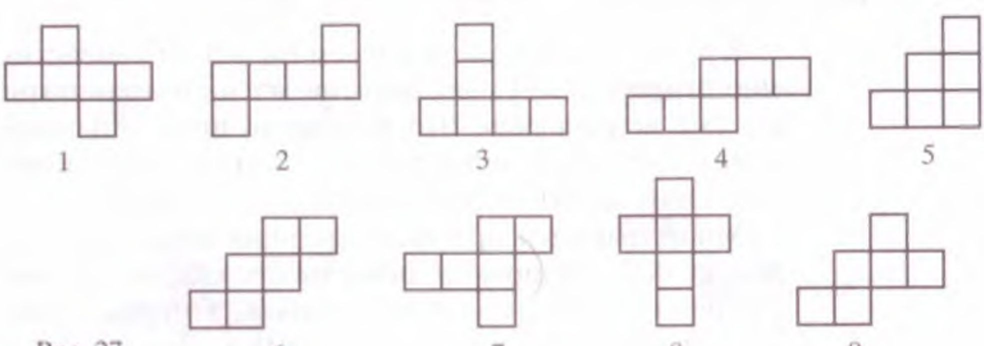


Рис. 27

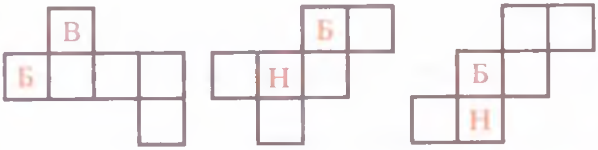


Рис. 28

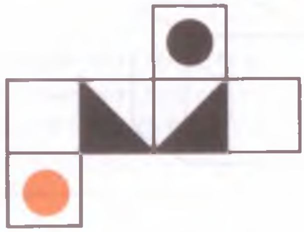
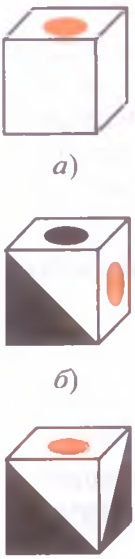


Рис. 29

4. Условимся боковые грани куба обозначать буквой Б, верхнюю — В, нижнюю — Н. Расставьте на развертках куба буквы в соответствии с уже намеченными (рис. 28).

5. Дана развертка куба (рис. 29). Какие из кубиков на рисунке 30, *а—в* можно из нее склеить? Выберите кубик и обоснуйте выбор.



а) *б*) *в*)

Рис. 30

6. На развертке куба (рис. 31) пронумерованы его грани. Запишите парами номера противоположных граней (противоположные грани не имеют общих ребер): 1,_ , 2,_ , 3,_ . Запишите грани, которые соседствуют с гранью 6. Перечертив развертку на бумагу, обозначив грани и вырезав ее, проверьте себя.

7. На видимых гранях куба (рис. 32, *а*) проставлены числа 1, 2, 3. А на развертках (рис. 32, *б*, *в*) — два из названных чисел или одно. Расставьте на развертках куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы сумма чисел на противоположных гранях была равна 7.

8. Пунктирными линиями обозначены невидимые ребра куба (рис. 33). Обведите ребра куба, которые лежат ближе к вам, красным цветом, а дальние — синим. Какие ребра ведут вглубь? Обведите их зеленым.

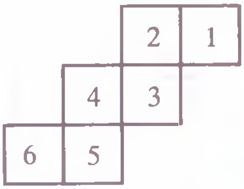
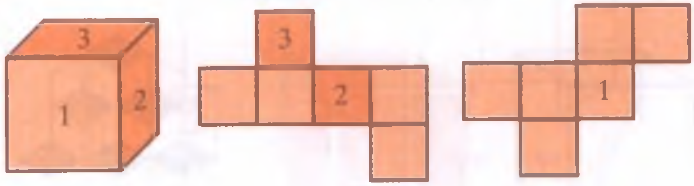


Рис. 31



а) *б*) *в*)

Рис. 32

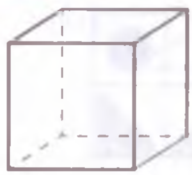


Рис. 33

Рис. 34

На этот куб мы смотрели справа сверху. На рисунке 34 проведите сплошные линии (видимые ребра) так, чтобы куб был «виден»: а) слева снизу; б) справа сверху; в) справа снизу.

9. Отрезок, соединяющий две противоположные вершины куба (наиболее удаленные друг от друга), называется ДИАГОНАЛЬЮ КУБА (рис. 35). Как измерить диагональ непустого куба, пользуясь только линейкой и карандашом, если есть: а) еще два таких же куба; б) один такой куб?

10. Рассмотрите рисунок 36. Что за странный куб изображен на нем? Что в нем необычного?

11. Сколько кубиков вы видите на рисунке 37?

12. Имеется полоска бумаги размером 1×7. Как из нее сложить единичный кубик (т. е. куб с ребром 1)?

13. Представьте, что куб стоит на одной своей вершине и освещен прямо сверху. Какая в этом случае получается тень от куба?

14. Имеется куб со стороной 3 см. Сколько надо сделать распилов, чтобы распилить его на кубики со стороной 1 см?

15. В противоположных (наиболее удаленных друг от друга) вершинах куба сидят паук и муха (рис. 38). Каким кратчайшим путем паук может доползти до мухи? Объясните ответ.

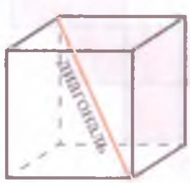


Рис. 35

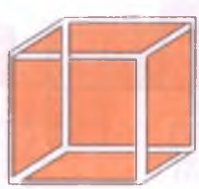


Рис. 36

Рис. 37

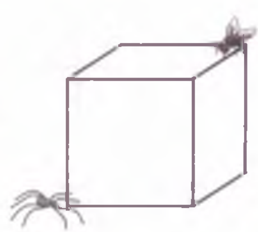
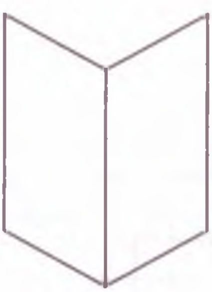


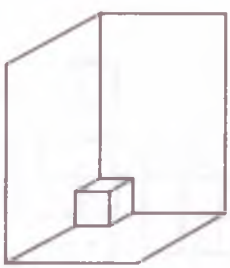
Рис. 38

✎ *Рисунок к заданию* 11 *относится к НЕОДНОЗНАЧНЫМ ФИГУРАМ. Рассмотрите картинки, изображенные на рисунке* 39. *Сколько разных объяснений вы найдете для каждой из них?*

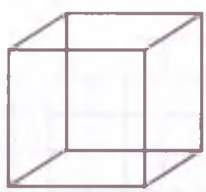
Э. Боринг. Леди и старуха



Фигура Маха



Что это?



С какой стороны мы смотрим на этот каркасный куб?

Рис. 39

6 Задачи на разрезание и складывание фигур

«Семь раз отмерь, один раз отрежь!» Эта пословица предостерегает вас от поспешности в решении задач. Заданную фигуру, которая для облегчения работы часто разделена на равные клеточки, надо разрезать на две или несколько одинаковых частей. Если эти части можно наложить одну на другую так, что они совпадут (при этом разрешается переворачивать их наизнанку), то задача решена верно.

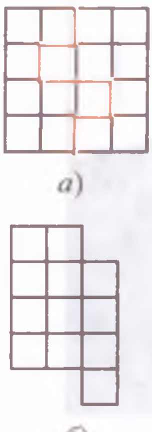


Рис. 40

1. На рисунке 40, *а* показан способ разрезания квадрата со стороной в четыре клетки по сторонам клеток на две равные части. Найдите пять других способов. Сколько существует способов разрезания квадрата на две равные части линиями, идущими по сторонам маленьких квадратиков?

2. Эта задача посложнее, так как фигура на рисунке 40, *б*, которую также нужно разрезать на две равные части, не такая простая.

3. Над разрезанием этих фигурок (рис. 41) на две равные части подумайте на досуге. Это очень хороший и полезный отдых, гораздо лучше сидения перед телевизором.

З а м е ч а н и е. Разрезать можно не только по сторонам, но и по диагоналям клеточек.

Рис. 41

А теперь мы предлагаем вам не задачу, а игру. И называется она ПЕНТАМИНО.

Эта игра была придумана в 50-х годах XX в. американским математиком С. Голомбом и очень быстро увлекла не только школьников и студентов, но и профессоров математики. Она заключается в складывании различных фигур из заданного набора пентамино. Набор пентамино содержит 12 фигурок, каждая из которых составлена из пяти («пента» в переводе с греческого означает «пять») одинаковых квадратов, причем квадраты «соседствуют» друг с другом только сторонами.

Составьте из пяти квадратов все 12 фигур пентамино. Сравните свои результаты с рисунком 42.

Изготовьте из картона набор пентамино со стороной квадратика, равной 2 см.

Уложите все 12 фигур пентамино в прямоугольник 6×10. Сколько разных вариантов вы можете предложить? Фигурки пентамино можно переворачивать.

Перемешайте фигуры пентамино на столе, чтобы они лежали произвольно, а затем сложите прямоугольник 6×10, не переворачивая ни одной фигурки.

Постройте два прямоугольника 5×6.

На рисунке 43, а фигурки пентамино, похожие на Т, уложены на плоскости без промежутков (говорят, что из них составлен паркет). Из каких еще фигурок пентамино можно составить паркет? Нарисуйте на клетчатой бумаге эти паркеты.

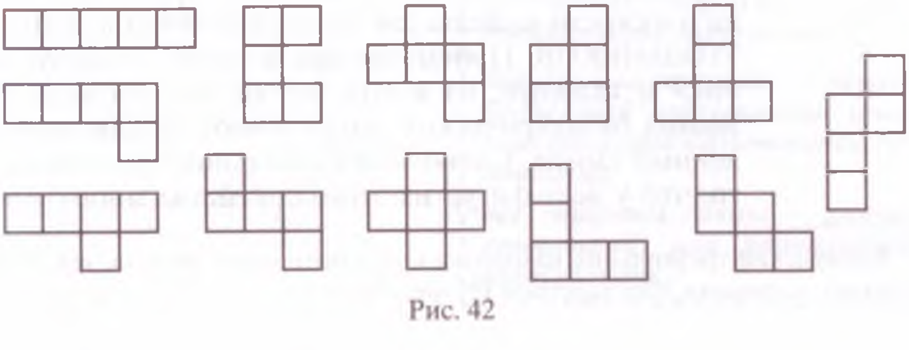


Рис. 42

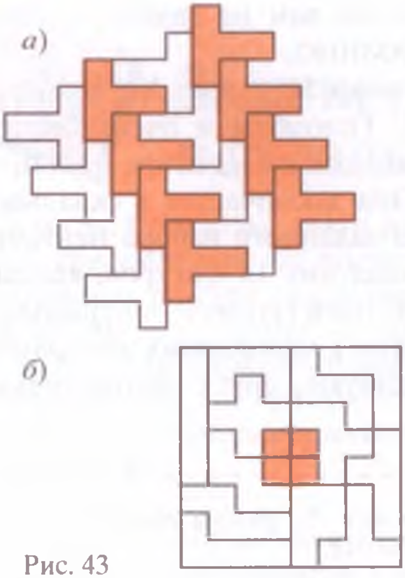


Рис. 43

В пентамино можно играть и вдвоем. Двое игроков по очереди выбирают любую из 12 фигурок пентамино и располагают ее на свободных клетках поля 8×8. Проигрывает тот, кто первым не сможет разместить на доске ни одного пентамино. Если же все фигурки удалось разместить на доске, то выигрывает ходивший последним.

Шахматную доску 8×8 полностью нельзя покрыть пентамино, останется четыре свободные клетки. Если вырезать в середине квадрат 2×2, то оставшиеся клетки покрываются двенадцатью фигурками пентамино. На рисунке 43, *б* изображено покрытие, предложенное Голомбом. Найдите еще хотя бы один вариант подобного покрытия квадрата 8×8 с вырезанной серединой.

7 Треугольник

Кто не слышал о загадочном Бермудском треугольнике[1], в котором бесследно исчезают корабли и самолеты?! А ведь знакомый всем нам с детства треугольник также таит в себе немало интересного и загадочного.

Среди множества различных геометрических фигур на плоскости выделяется большое семейство МНОГОУГОЛЬНИКОВ. Присмотритесь к слову «многоугольник» и скажите, из каких частей оно состоит. Названия геометрических фигур имеют вполне определенный смысл. Слово «многоугольник» указывает на то, что у всех фигур из этого семейства много углов.

[1] Бермудский треугольник находится в Атлантическом океане между Бермудскими островами, государством Пуэрто-Рико и полуостровом Флорида.

Рис. 44

Но для характеристики фигуры этого еще недостаточно. Например, у фигуры, изображенной на рисунке 44, тоже много углов, но она не является многоугольником. Определяя многоугольник, мы говорим, что эта фигура ограничена замкнутой ломаной линией, звенья которой не пересекают друг друга.

Подставьте в слове «многоугольник» вместо части «много» конкретное число, например 5. Вы получите пятиугольник (рис. 45, *а*, *б*). Или 6. Тогда — шестиугольник (рис. 46, *а*, *б*). Заметьте, что сколько углов, столько и сторон, поэтому эти фигуры вполне можно было бы назвать и многосторонниками. Внимательно рассмотрите рисунки 45 и 46.

а)

б)

Рис. 45

Чем отличаются многоугольники на рисунках 45, а и 46, а от многоугольников на рисунках 45, б и 46, б?

Каким НАИМЕНЬШИМ числом можно заменить «много» в слове «многоугольник»?

Самым простым многоугольником является треугольник. Но простым — еще не значит неинтересным. Посмотрим, что преподнесет нам знакомство с треугольниками.

а)

б)

Рис. 46

На рисунке 47 изображен треугольник *ABC* и указаны основные его элементы. Вершины треугольника, а также соответствующие углы принято обозначать большими латинскими буквами *A*, *B*, *C* или *K*, *L*, *M* и т. д., а весь треугольник обозначают так: $\triangle ABC$ или $\triangle KLM$ (по буквам вершин). Все большое семейство треугольников можно разделить на группы по числу равных сторон:

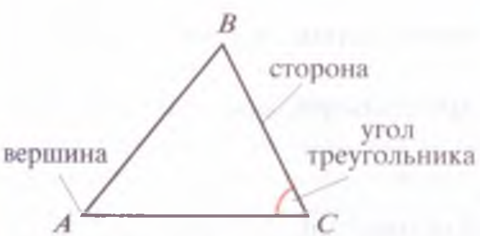


Рис. 47

Равных сторон нет — разносторонний треугольник;

две равные стороны — равнобедренный треугольник (равные стороны называются боковыми);

все стороны равны — равносторонний, или правильный, треугольник.

Треугольники можно разделить на группы в зависимости от углов:

Все углы острые — остроугольный треугольник;
есть прямой угол — прямоугольный треугольник;
есть тупой угол — тупоугольный треугольник.

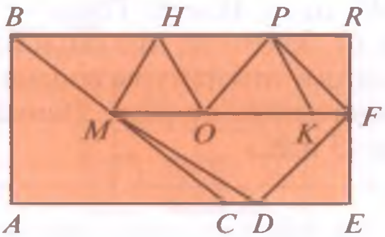


Рис. 48

На рисунке 48 найдите равнобедренные, правильные, разносторонние, остроугольные, прямоугольные, тупоугольные треугольники. Запишите их. Попадают ли какие-либо из них в две группы сразу?

В разделе 6 мы составляли из некоторых фигурок пентамино паркеты. А можно ли одинаковыми треугольниками покрыть плоскость без промежутков? Вырежьте из бумаги несколько одинаковых треугольников и проверьте свое предположение о возможности такого покрытия. Подумайте, зависит ли результат от вида треугольников.

Посмотрите внимательно на получившиеся паркеты.

Какой вывод о сумме углов треугольника вы можете сделать?

1. Измерьте с помощью транспортира углы треугольников на рисунке 48 и результаты внесите в таблицу, в последнем столбце которой запишите сумму углов.

а) Какое число должно было бы стоять в последнем столбце, если бы все измерения были сделаны абсолютно точно?

б) Может ли быть треугольник с двумя прямыми углами?

в) Существует ли треугольник, все углы которого больше 70°?

г) Существует ли треугольник, все углы которого меньше 50°?

2. Начертите в тетради:

а) равнобедренный остроугольный треугольник;

б) равнобедренный прямоугольный треугольник;

в) равнобедренный тупоугольный треугольник.

3. Можно ли внутри равнобедренного треугольника поместить другой равнобедренный треугольник с такими же боковыми сторонами? А с бо́льшими?

4. На сколько треугольников разбивается выпуклый шестиугольник отрезками, соединяющими какую-либо его вершину с остальными вершинами шестиугольника? А если взять произвольный n-угольник?

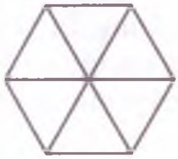


Рис. 49

Треугольники, соединяясь друг с другом, могут образовывать другие фигуры. Например, шесть правильных треугольников, имеющих общую вершину, образуют правильный шестиугольник (рис. 49). Шестиугольник, как и сам треугольник, плоская фигура. Если же к стороне одного правильного треугольника, лежащего на столе, приставить еще три таких треугольника так, чтобы одна вершина оказалась общей, то получится объемное геометрическое тело — ПИРАМИДА (рис. 50).

Слово «пирамида» происходит от древнеегипетского слова «пурама» (так пирамиды называли древние египтяне). Современные египтяне называют пирамиды словом «хирам», которое тоже происходит от этого древнеегипетского слова.

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, на какой многоугольник опираются треугольники (в геометрии говорят — какой многоугольник лежит в основании пирамиды). Треугольная пирамида имеет еще одно название — ТЕТРАЭДР, т. е. четырехгранник («тетра» — четыре, «эдр» — грань).

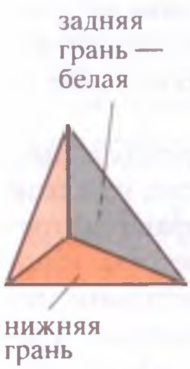
Рис. 50

Возьмите в руки или представьте по рисунку 50 треугольную пирамиду, исследуйте ее так, как вы исследовали когда-то куб. Результаты исследований запишите в тетрадь. Подумайте, что является разверткой тетраэдра, нарисуйте ее. Сделайте модель тетраэдра из бумаги. Будьте аккуратны при вычерчивании развертки.

5. Дан тетраэдр, грани которого окрашены в серый, оранжевый, розовый и белый цвета (рис. 51). Тетраэдр начинают перекатывать, как показано на рисунке, причем он оставляет след такого же цвета, что и грань, касающаяся бумаги. Если тетраэдр сначала стоял на оранжевой грани, то какого цвета будет последний след? Постарайтесь догадаться без модели. Если трудно догадаться, то модель вам поможет.

6. Тетраэдр (см. рис. 51), перекатываясь с грани на грань, возвращается в свое исходное положение. Если сначала нижняя грань была оранжевой, то какой она будет после возвращения? Зависит ли результат от пути?

Пирамида — «жесткое» геометрическое тело, т. е. его нельзя изменить, не сломав. Этим свойством «жесткости» обладают все ИЗВЕСТНЫЕ вам многогранники. Лишь совсем недавно американский геометр Коннели сумел построить «хитрый» многогранник, который этим свойством не обладает, а может изменять свою форму так, что каждая его грань остается неизменной. Это очень сложный многогранник. Некоторое представление о нем дает рисунок 52.



Существует интересная геометрическая игрушка, которая состоит из треугольников и меняется, выворачиваясь наизнанку. Это игрушка ФЛЕКСАГОН (от английского слова to flex, что означает «складываться, гнуться»). Другими словами, флексагон — гнущийся многоугольник. Флексагон обладает удиви-

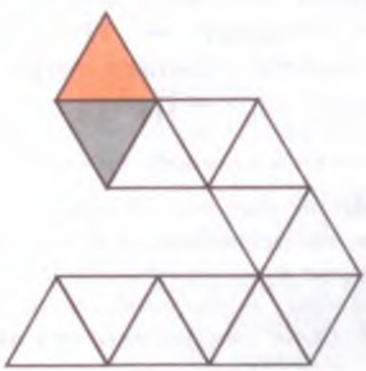


Рис. 51


Рис. 52

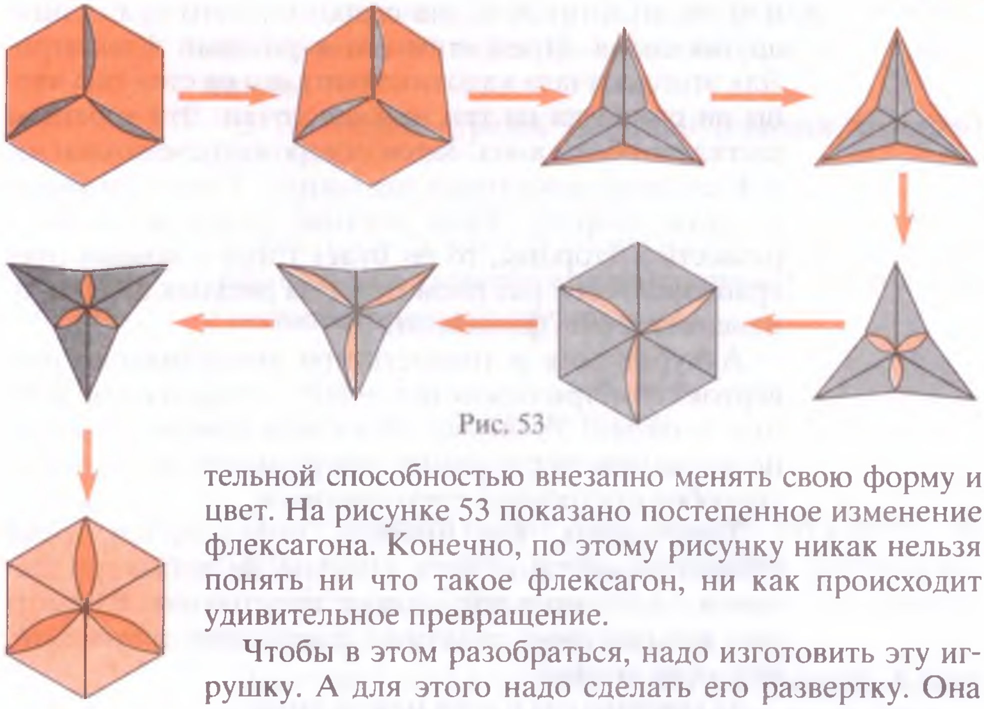


Рис. 53

тельной способностью внезапно менять свою форму и цвет. На рисунке 53 показано постепенное изменение флексагона. Конечно, по этому рисунку никак нельзя понять ни что такое флексагон, ни как происходит удивительное превращение.

Чтобы в этом разобраться, надо изготовить эту игрушку. А для этого надо сделать его развертку. Она состоит из десяти правильных треугольников, расположенных так, как на рисунке 54. Пусть сторона каждого треугольника равна 3 см. Изготовьте такую полоску и раскрасьте. Вырежьте полоску и переверните ее так, чтобы верхний край оказался внизу, а нижний вверху. Оборотную сторону раскрасьте также в соответствии с рисунком. Перегните полоску по сторонам треугольников и сложите, как показано на рисунке 55. Оставшийся треугольник подогните вниз, склейте друг с другом две неокрашенные треугольные поверхности,

Рис. 54

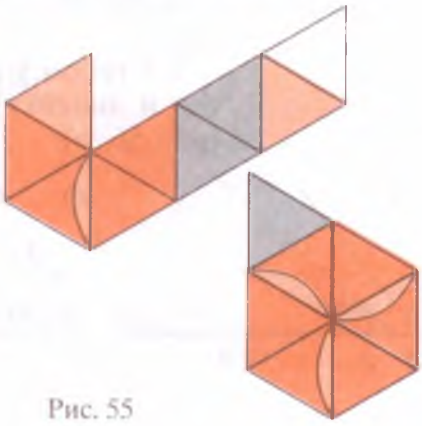


Рис. 55

и флексагон готов. Одна сторона у него оранжевая, другая серая. Превратим его в розовый флексагон. Для этого сначала надо поставить его на стол так, чтобы он опирался на три нижние точки. Эти вершины слегка отгибаем вниз. Затем осторожно соединяем их, и флексагон вывернется наизнанку. Теперь он имеет розовую сторону. Если верхние точки флексагона развести в стороны, то он будет готов к новому превращению. Еще раз посмотрим на рисунок 53. Так ли изменяется ваш флексагон?

Аккуратность и точность при вычерчивании разверток геометрических тел — 80% успеха в изготовлении моделей! Добиться этого нам поможет умение пользоваться чертежными инструментами и знание способов построения треугольников.

Треугольник, как правило, определяется тремя своими элементами. Хотя, конечно, не любые три элемента однозначно определяют треугольник. Рассмотрим три основные задачи на построение треугольников, если заданы:

а) две стороны и угол между ними;

б) сторона и два прилежащих к ней угла;

в) три стороны.

Каждая из этих задач решается достаточно просто.

Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Пусть в треугольнике ABC известны две стороны $AB = 5$ см и $AC = 3$ см и угол между ними BAC, равный 50°. По этим данным и построим треугольник ABC.

1. Строим угол, равный 50° (используем транспортир и линейку). Вершину угла обозначим буквой A (рис. 56, *а*).

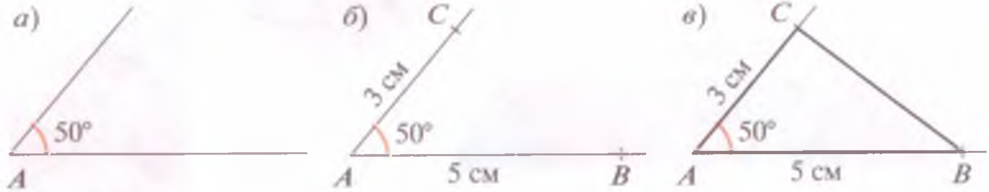


Рис. 56

2. На сторонах угла (рис. 56, *б*) отложим отрезки $AB = 5$ см и $AC = 3$ см (используем линейку с делениями).

3. Проведем отрезок CB (при помощи линейки) (рис. 56, *в*).

Нужный треугольник построен.

Заметим, что, какими бы мы ни задали две стороны треугольника, существует единственный треугольник с такими сторонами и углом.

Построение треугольника по стороне и двум углам

Пусть в треугольнике ABC сторона AB равна 6 см, $\angle BAC = 70°$, $\angle ABC = 40°$. Постройте треугольник по этим данным. Рисунок 57 иллюстрирует процесс построения искомого треугольника.

Запишите себе в тетрадь этапы построения. Какие инструменты использовались? Возникает вопрос: всегда ли возможны требуемые построения?

Прежде чем ответить на него, попробуйте решить задачу на построение треугольника по следующим данным: сторона треугольника равна 6 см, а прилежащие к ней углы равны 85° и 100°.

Можно сделать вывод: по стороне и двум прилежащим к ней углам можно построить единственный треугольник, но при этом величины заданных углов не могут быть произвольными. Позднее вы узнаете, что соответствующее построение возможно, если сумма заданных углов меньше 180°.

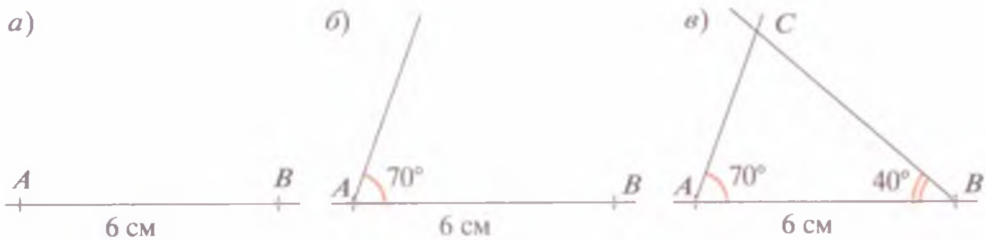


Рис. 57

Построение треугольника по трем сторонам

Постройте треугольник со сторонами 7 см, 5 см, 4 см. Рисунок 58 иллюстрирует решение этой задачи. Как видите, на сей раз нам для построения потребовался циркуль. Вершина *C* — точка пересечения двух окружностей с радиусами 5 см и 4 см. И хотя эти окружности пересекаются в двух точках, мы можем выбрать любую из них, поскольку получающиеся треугольники равны.

И здесь вновь возникает вопрос: любые ли три отрезка могут быть сторонами треугольника? Прежде чем ответить на него, решим еще две задачи.

Можно ли построить треугольник, стороны которого являются отрезками длиной: а) 7 см, 4 см, 2 см; б) 9 см, 5 см, 4 см?

Нетрудно понять, что три данных отрезка могут служить сторонами треугольника, если сумма длин двух меньших отрезков больше длины наибольшего из них.

Если во всех рассмотренных выше случаях по трем заданным элементам можно построить треугольник, то этот треугольник единственный. Другими словами, если у двух треугольников равны три соответствующих элемента (две стороны и угол между ними; сторона и два прилежащих к ней угла; три стороны), то такие треугольники равны. Однако так бывает не всегда.

Рассмотрим, например, задачу о построении треугольника по двум сторонам и углу, но не между данными сторонами.

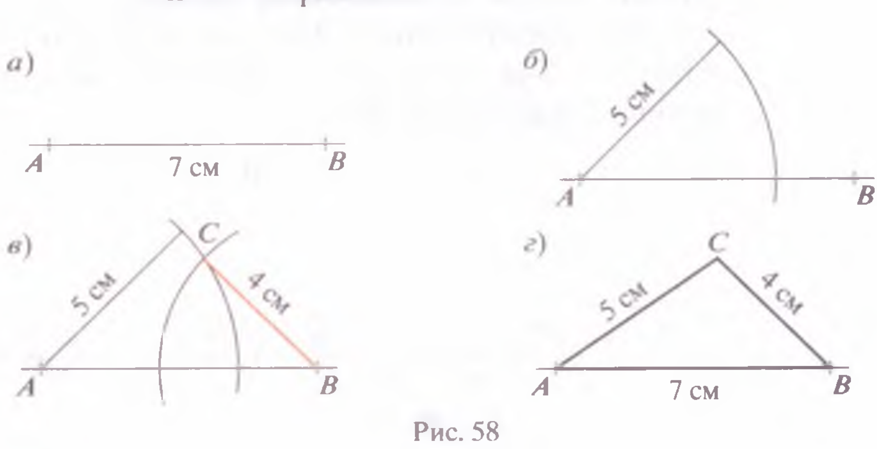


Рис. 58

Пусть в треугольнике ABC угол BAC равен 40°, сторона AB равна 4 см. Рассмотрим три случая: а) BC = 2 см; б) BC = 3,5 см; в) BC = 5 см.

Рисунок 59, *а*, *б*, *в* иллюстрирует каждый из трех случаев. Как видим, в случае *а*) задача не имеет решений; *б*) — существуют два треугольника, удовлетворяющих условию задачи ($\triangle ABC$ и $\triangle ABC_1$); в случае *в*) такой треугольник один.

Задачи на построение, наверное, одни из самых древних математических задач. По их поводу у математиков существует целый ряд договоренностей и ограничений. По этим договоренностям стороны треугольника, например, задаются в виде отрезков, а не числами, определяющими их длину; также и углы задаются в виде геометрической фигуры — угла. При построении же разрешается пользоваться лишь математической линейкой (т. е. односторонней линейкой без делений) и циркулем. Транспортир, как и линейка с делениями, не входит в число традиционно разрешенных инструментов.

Если мы теперь вернемся к задаче построения треугольника по трем сторонам, то исходными данными для построения будут являться три данных отрезка. Само построение будет почти таким же. Задачами на построение циркулем и линейкой вы будете специально заниматься в дальнейшем.

Треугольник — плоская фигура. Он изображается без искажений, если, конечно, по заданным величинам можно построить треугольник.

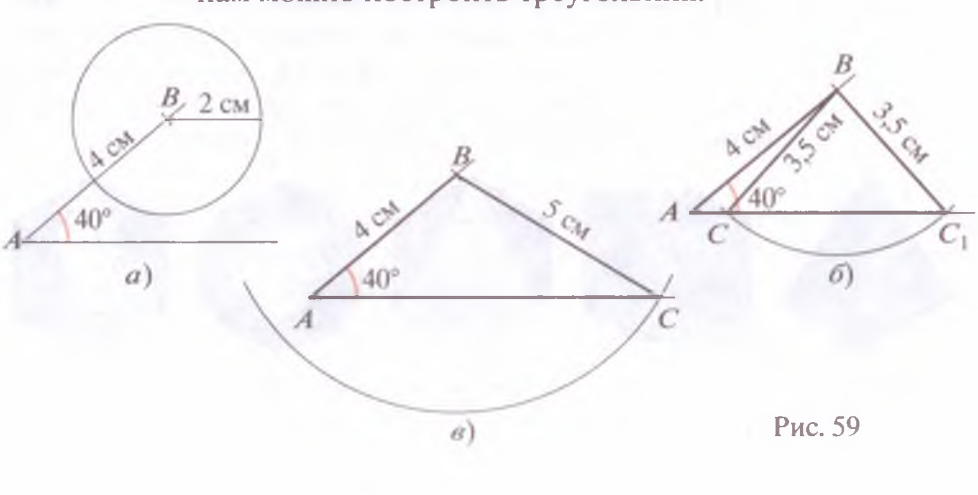


Рис. 59

Рис. 60

Сложнее обстоит дело с пространственными объектами. Плоский рисунок может обманывать, изображая невозможное. Вы уже встречались с изображением невозможного куба (см. рис. 36). Мы предлагаем еще один невозможный объект — ТРЕУГОЛЬНИК ПЕНРОУЗА (рис. 60). Закройте одну из вершин этого треугольника, и станет ясно, что одна из его сторон направлена к нам, а другая — от нас, т. е. они не могут соединиться в пространстве.

Придумайте и нарисуйте свой невозможный объект.

8 Правильные многогранники

Однажды обыкновенный английский мальчик Джеймс, увлекшись изготовлением моделей многогранников, написал в письме к отцу: «...я сделал тетраэдр, додекаэдр и еще два эдра, для которых не знаю правильного названия». Эти слова знаменовали рождение в пока ничем не примечательном мальчике великого физика Джеймса Кларка Максвелла. Думается, что и вас, и ваших родных увлечет изготовление моделей геометрических тел.

Эти страницы книги — для работы дома. Приближается Новый год — самый веселый и красивый праздник. Кроме традиционных елочных украшений (хлопушек и фонариков) вы можете изготовить геометрические игрушки. Это модели правильных многогранников, сделанные из цветной бумаги. Рассмотрите рисунок 61, на котором изображены правильные многогранники — тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Их форма — образец совершенства!

Рис. 61

Вы можете заметить ряд интересных особенностей, благодаря которым они и получили свое название. Так, у каждого из них все грани — одинаковые правильные многоугольники, в каждой вершине одного многоугольника сходится одно и то же число ребер, а соседние грани сходятся под равными углами.

Подсчитаем число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) у каждого многогранника и запишем результаты в табличку.

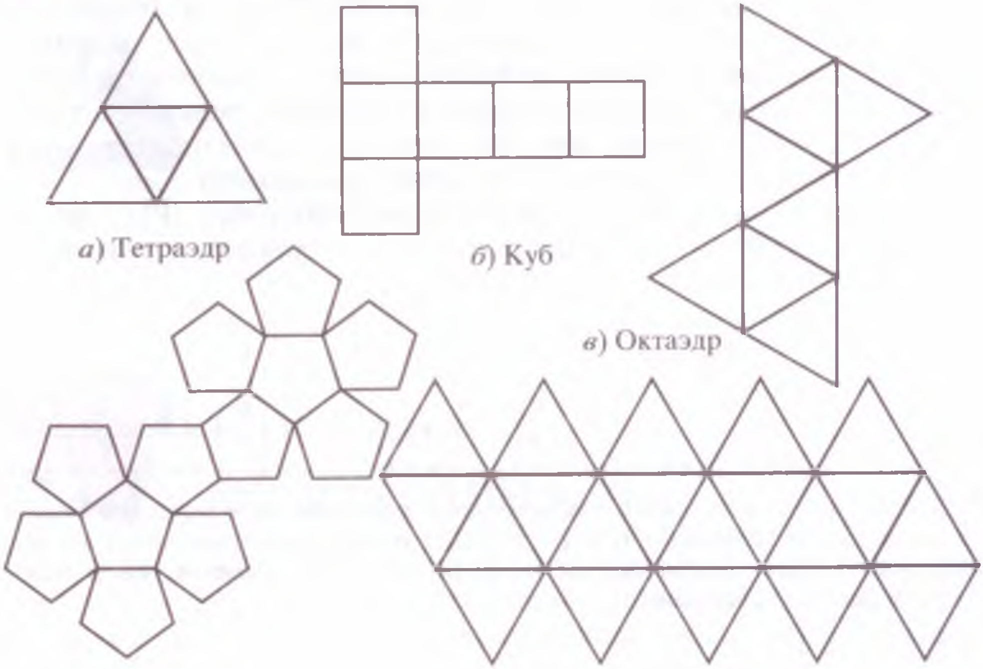
Многогранник	В	Г	Р	В + Г – Р
Тетраэдр	4	4	6	2

В последней колонке для всех многогранников получился один и тот же результат: В + Г – Р = 2. Самое удивительное в этой формуле, что она верна не только для правильных, но и для ВСЕХ многогранников!

Ради интереса можете проверить это для нескольких наугад взятых многогранников. Доказал это удивительное соотношение один из величайших математиков Леонард Эйлер (1707—1783), поэтому формула названа его именем: ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА. Этот гениальный ученый, родившийся в Швейцарии, почти всю жизнь прожил в России, и мы с полным основанием и гордостью можем считать его своим соотечественником.

У правильных многогранников есть еще одна особенность. Оказывается, первый из них (тетраэдр) стоит немного особняком: если считать центры его граней вершинами нового многогранника, то вновь получим тетраэдр. Зато четыре оставшихся многогранника разбиваются на две пары. Центры граней куба образуют октаэдр, а центры граней октаэдра — куб. То же происходит с парой додекаэдр — икосаэдр.

Совершенство форм, красивые математические закономерности, присущие правильным многогранникам, явились причиной того, что им приписывались различные магические свойства и все пять геометрических тел издавна были обязательными спутниками волшебников и звездочетов. И если вы потрудитесь над их изучением и изготовлением, то наверняка они



а) Тетраэдр *б*) Куб *в*) Октаэдр *г*) Додекаэдр *д*) Икосаэдр

Рис. 62

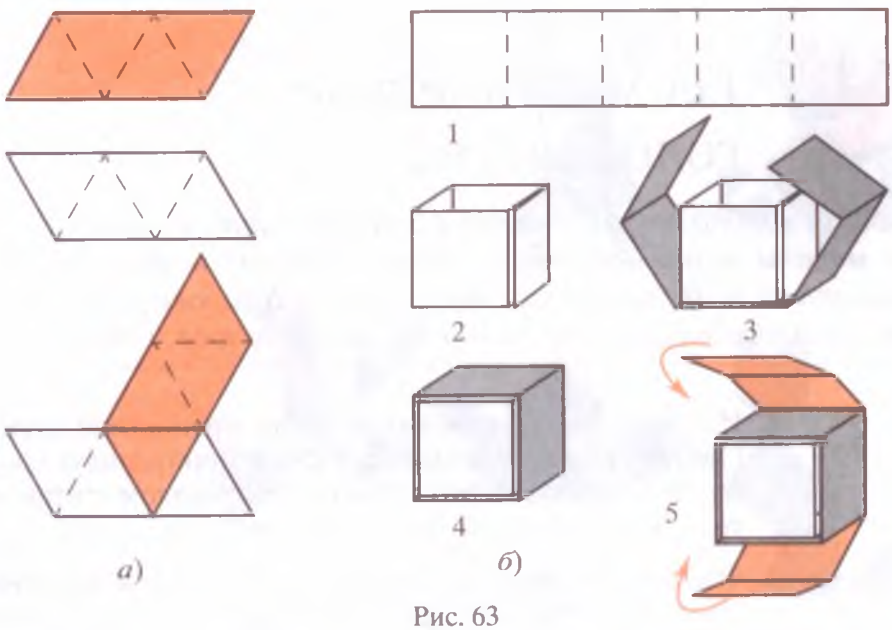
доставят вам радость и удовольствие, а возможно, принесут удачу в новом году!

На рисунке 62, *а—д* даны развертки этих елочных игрушек. При изготовлении моделей не забудьте в нужных местах сделать клапаны для склеивания!

Есть еще один способ изготовления моделей многогранников, при котором они сплетаются из нескольких полосок бумаги. Без применения клея модель приобретает жесткую структуру после того, как будет заправлен последний кусочек бумаги.

На рисунке 63, *а* показано, как можно сплести тетраэдр из двух полосок, состоящих из четырех треугольников.

Согните и разогните каждую из полосок по пунктирным линиям, чтобы образовались сгибы — «овраги». Наложите цветную полоску на белую. Сложите из белой тетраэдр так, чтобы цветной треугольник оказался внутри него, затем оберните цветной полоской две грани тетраэдра и оставшийся треугольник вставьте в щель между двумя белыми треугольниками.



а) *б)*

Рис. 63

На рисунке 63, *б* дан один из способов плетения куба из трех полосок, разделенных на пять квадратов.

1. Вырежьте три такие полоски (белую, черную, красную).

2. Сложите белую полоску.

3. Оберните ее черной полоской.

4. Получим куб, у которого передняя и задняя грани белые, а остальные — черные.

5. Третью полоску (красную) пропустите сзади куба в щель между белой и черной полосками, согните и конечные квадраты также пропустите в щель между передней белой гранью и черной полоской.

Если полоски разного цвета, то у получающегося куба противоположные грани одинакового цвета. Показанный на этом рисунке способ интересен тем, что любые две полоски не зацеплены одна с другой, а все три зацеплены. Существует другой способ плетения куба из таких же полосок. При этом каждые две полоски оказываются зацепленными, а одинаково окрашенными будут пары соседних граней. Попробуйте найти этот второй способ плетения куба самостоятельно.

9 Геометрические головоломки

Хорошее воображение — это качество, необходимое в равной мере и математику, и поэту. Великий французский просветитель Вольтер как-то сказал: «В голове у Архимеда было гораздо больше воображения, чем в голове у Гомера».

1. На рисунке 64 изображена часть крепостной стены. Один из камней стены имеет столь причудливую форму, что если вытащить его из стены и положить иначе, то стена станет ровной. Изобразите этот камень.

2. Отец, у которого было четыре сына, имел квадратное поле. Четверть поля (рис. 65) он оставил себе. Остальную часть обещал отдать сыновьям, если те сумеют разделить поле между собой на равные по площади и по форме части. Как сыновьям выполнить это?

Занимательных задач на разрезание квадрата — множество. Если разрезать квадрат, как показано на рисунке 66, то получится популярная китайская головоломка ТАНГРАМ, которую в Китае называют «чи чао ту», т. е. умственная головоломка из семи частей.

Название «танграм» возникло в Европе, вероятнее всего, от слова «тань» (что означает «китаец») и корня «грамма» (в переводе с греческого «буква»).

3. Изготовьте головоломку сами: переведите на плотную бумагу квадрат, разделенный на семь частей (рис. 66),

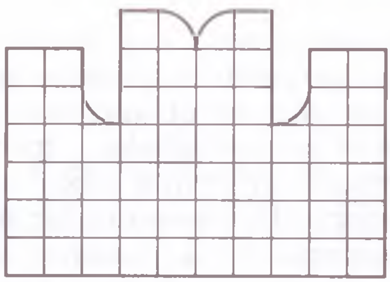


Рис. 64

Рис. 65

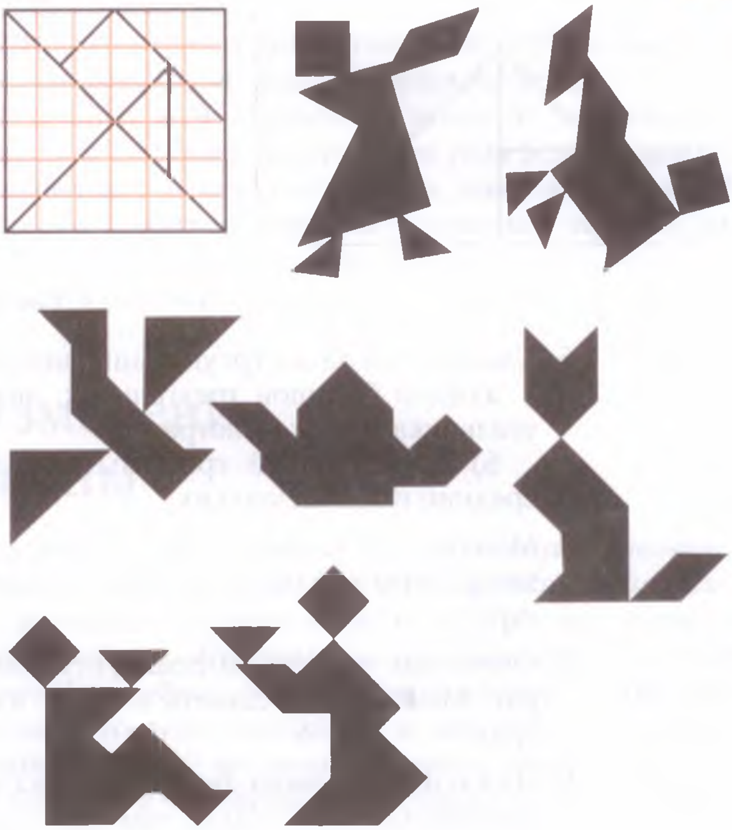


Рис. 66

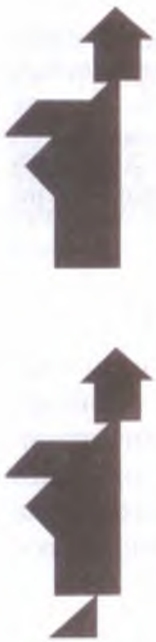


Рис. 67

и разрежьте его. Головоломка состоит в том, чтобы, используя все семь частей, сложить фигурки, приведенные на том же рисунке 66. Может, вам удастся придумать и свои картинки?

4. Как ни странно, обе фигурки, изображенные на рисунке 67, составлены из всех кусочков танграма. Каким образом фигурка справа приобрела ногу?

Геометрия танграма

В танграме среди его семи фигур уже имеются треугольники трех разных размеров. Но можно сложить еще один треугольник, используя четыре фигуры: один большой треугольник, два маленьких и квадрат (рис. 68).

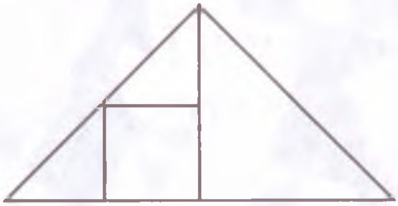


Рис. 68

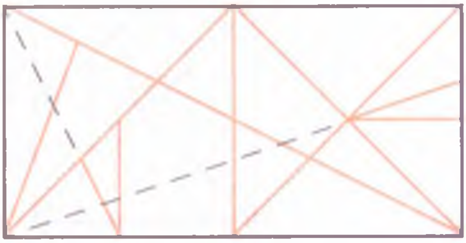


Рис. 69

5. Сложите такой же треугольник, используя:
   а) один большой треугольник, два маленьких треугольника и параллелограмм;
   б) один большой треугольник, один треугольник средний и два маленьких.
6. Можно ли составить треугольник, используя только две фигуры танграма? три? пять? шесть? все семь фигур?
7. Очевидно, что из всех семи фигур составляется квадрат. Можно ли составить квадрат из двух фигур? из трех?
8. Из каких различных фигур танграма можно составить прямоугольники? Какие еще многоугольники можно составить?

Стомахион («приводящая в ярость»)

Игра стомахион была известна еще до нашей эры. Создателем ее считали Архимеда. В 1899 г. швейцарский историк Генрих Зютер обнаружил в книгохранилищах Берлина и Кембриджа арабскую рукопись «Книга Архимеда о разбиении фигуры стомахиона на 14 частей, находящихся в рациональных отношениях».

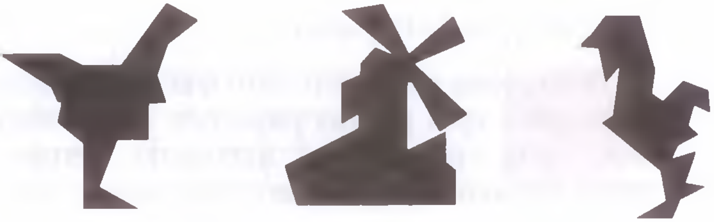


Рис. 70

Позже датский историк математики Гейберг подтвердил, что создателем игры является Архимед.

Сделайте игру стомахион: возьмите прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой, и выполните в нем построения, как на рисунке 69. Разрезав прямоугольник по сплошным линиям, составьте фигурки курицы, мельницы и петуха (рис. 70), а также какие-нибудь свои фигурки.

10 Измерение длины

«Измерь самого себя — и ты станешь настоящим геометром!» — воскликнул средневековый философ Марсилио Сичино. Конечно, измерить самого себя и стать настоящим Геометром, настоящим Поэтом, Садовником и вообще Настоящим очень трудно. Не всякому удается сделать это за всю жизнь, но если говорить о чем-то более простом, то с уверенностью можно сказать, что каждому человеку, научившемуся считать и писать, неоднократно приходилось что-либо измерять: высоту дерева, собственный вес, длину прыжка, время бега и многое другое. И все же давайте подумаем над вопросом: «Что значит — измерить какую-то величину?»

Любые измерения производят в каких-то единицах: длину измеряют в **единицах длины**, вес — в **единицах веса**, время — в **единицах времени** и т. д. За свою историю человечество придумало огромное количество всевозможных единиц, причем каждый народ имел свои. Как известно, герои одного мультфильма измеряли длину удава в попугаях. Для обитателей тропического леса, в котором живет попугай, эта единица не хуже других. Но длина в попугаях ничего не скажет жителям тайги, да и для соседних джунглей, где живут попугаи другой породы, придется переводить своих попугаев в чужих.

Эта история из мультфильма не такая уж нелепая. Правители разных стран любили устанавливать свои меры, часто связанные с собственной персоной. Например, английский король Генрих I ввел в качестве единицы длины ЯРД — расстояние от кончика своего носа до большого пальца вытянутой руки. Более демократична по происхождению другая английская единица длины — ФУТ, что по-английски означает «ступня». 16 англичан выстраивались в цепочку таким образом, что каждый следующий касался концами пальцев своих ног пяток предыдущего. Одна шестнадцатая такой цепочки и составляла 1 фут. Можно сказать, что английский фут — это длина ступни среднего англичанина.

На Руси в старину мерами длины были ПЯДЬ, ШАГ, ЛОКОТЬ. Большие расстояния измерялись ПОЛЕТОМ СТРЕЛЫ. Несколько позже появились АРШИН, САЖЕНЬ, ВЕРСТА и др.

С развитием ремесел и торговли появилась потребность в международных единицах, определяемых через что-то более постоянное, чем, например, длина ступни. Так появился МЕТР. Первоначально в 1791 г. метр был определен как одна сорокамиллионная часть $\left(\frac{1}{40\,000\,000}\right)$ Парижского меридиана. Был изготовлен эталон метра — металлический брус из сплава платины и иридия. На него нанесены два штриха, расстояние между которыми и составляет 1 метр. Этот эталон хранится в Международном бюро мер и весов в Севре, недалеко от Парижа.

После введения метра одни страны сразу приняли его, другие же, славящиеся приверженностью традициям, не спешили отказываться от своих единиц (и до сих пор Англия, США и некоторые другие страны измеряют длины в дюймах, футах, ярдах, милях). Поэтому для международного общения потребовалось научиться переводить национальные меры в международные и обратно. С этой целью некоторую неизменную величину, например Парижский меридиан, надо было измерить в тех и других единицах.


Эталон метра

Таким образом выяснилось, какую часть метра (или сколько метров) составляет та или иная мера длины (например, английский фут оказался равен 0,3048 м).

Вернемся к вопросу, заданному в начале раздела: «Что значит измерить?» Коротко можно ответить так: «Измерить — значит сравнить с эталоном». Измерим длину отрезка прямой линии в заданных единицах (измерение длин кусков кривой линии — несколько иная задача). Берем единицу длины, например метр, и откладываем его на нашем отрезке до тех пор, пока остаток не станет меньше него. Получившееся число целых единиц запишем. Теперь разделим нашу единицу на 10 равных частей и на оставшейся части измеряемого отрезка будем откладывать $\frac{1}{10}$ часть единицы. Получившееся целое число от 0 до 9 припишем после запятой к полученному ранее целому.

Таким образом последовательно получают десятые, сотые... доли единицы. Теоретически этот процесс может продолжаться бесконечно долго, но на практике он быстро закончится. Продолжать измерения станет либо практически невозможно, либо бессмысленно. Чем на меньшие доли мы раздробили метр, тем больше точность измерения. Точность измерения зависит, во-первых, от измерительного инструмента: если мы измеряем длину садового участка метром без делений, то получим эту величину с точностью до 1 метра. Например, длина участка — около 50 м. Если длину мерить рулеткой, самое мелкое деление которой 1 см, то длина участка будет измерена с точностью до 1 см (например, длина участка около 49 м 68 см).

Каждый раз, измеряя на практике длину чего-либо, мы должны выбирать некоторую РАЗУМНУЮ точность измерения: ведь нет необходимости знать длину участка в миллиметрах или расстояние от Земли до Солнца в метрах. Точность измерения определяется также свойствами измеряемого объекта. Кусок ткани, например, может растягиваться, да и край у него не всегда четко обозначен.

Итак, измеряя на практике различные величины, мы всегда получаем приближенные значения, но погрешность измерения часто не учитываем и считаем полученный результат истинным. Математики же в своих рассуждениях исходят из того, что отрезки (и другие величины) имеют точную длину (точное значение), и оперируют этими точными числами. Так же в дальнейшем будем действовать и мы. Вот одна простая задача.

1. Некий путешественник оказался среди жителей малоизвестного племени. Их язык ему понятен, но единиц измерения он не знает. Для больших расстояний местные жители пользуются единицей, которую называют ЯЛИМ. Путешественник измерил в километрах расстояние между двумя деревнями. Оно оказалось равным 10,8 км. Местные жители определяют это расстояние в 8,1 ялима. Сколько километров надо пройти путешественнику, чтобы добраться до ближайшей реки, если жители говорят, что это расстояние составляет 3,6 ялима?

В связи с этой задачей полезно сформулировать одно очень простое, но очень важное утверждение.

Отношение длин двух отрезков есть число, которое не зависит от единицы измерения.

Оно называется ОТНОШЕНИЕМ ОТРЕЗКОВ.

Чтобы завершить наш разговор о единицах измерения, расскажем о старинных русских мерах длины и некоторых иностранных.

ВЕРШОК — верх указательного пальца, точнее, два верхних сустава этого пальца, равен $\frac{1}{4}$ пяди.

ПЯДЬ — расстояние между концами большого и указательного пальцев, растянутых в плоскости, равна $\frac{1}{4}$ аршина. Ее еще называли «четверть».

АРШИН — примерно расстояние от плеча до конца вытянутой руки взрослого человека. 1 аршин равен 0,711 м.

САЖЕНЬ равна 3 аршинам. КОСАЯ САЖЕНЬ равна 2,48 м.

МАХОВАЯ САЖЕНЬ равна 1,76 м.

ВЕРСТА — старинная русская мера пути, равная 500 саженям.

Все это старинные русские меры длины. Приведем еще некоторые меры длины, которыми пользовались (а некоторые пользуются и сейчас) в разных странах.

СТАДИЙ — мера длины многих древних народов. Величина стадия различна, например, ВАВИЛОНСКИЙ СТАДИЙ — около 195 м, АТТИЧЕСКИЙ СТАДИЙ — около 185 м. По-гречески стадий и стадион пишутся одинаково.

ЛИ — единица длины, издавна существовавшая в странах Дальнего Востока. Сказать что-либо определенное об этой единице трудно, поскольку ее величина в разных странах меняется от долей миллиметра до 500 м.

ЛЬЁ (лье) — старинная единица длины во Франции.

СУХОПУТНОЕ ЛЬЕ СОСТАВЛЯЕТ 4,444 км, МОРСКОЕ ЛЬЕ равно 5,556 км.

МИЛЯ — происходит от латинского слова, означающего «тысяча шагов». Эта единица ранее была распространена во многих странах, а сегодня используется главным образом в морском деле, МИЛЯ МОРСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ равна 1,852 км. МОРСКАЯ МИЛЯ В ВЕЛИКОБРИТАНИИ немного больше — 1,8532 км. Кроме того, в Великобритании и США есть еще УСТАВНАЯ СУХОПУТНАЯ МИЛЯ, равная 1,609 км.

ФУТ — равен 0,3048 м.

КАБЕЛЬТОВ — $\frac{1}{10}$ морской мили.

ДЮЙМ — английская мера длины, равная $\frac{1}{12}$ фута, или 2,54 см.

Стоит заметить, что в старину на Руси использовались не только исконные русские меры, но и пришедшие с Запада. Такой единицей был ДЮЙМ, а также связанные с ним ЛИНИЯ и ТОЧКА. По поводу ТОЧКИ в словаре Даля сказано, что это «малейшая доля протяженья». И поясняется: в дюйме 10 ЛИНИЙ, в линии — 10 ТОЧЕК.

Еще несколько английских мер длины:

МИЛ (не путайте с милей) — тысячная доля дюйма.

ЯРД — равен 3 футам.

2. Запишите все известные, а вернее, перечисленные выше единицы длины в порядке возрастания.

3. Известно старинное пожелание морякам: «Семь футов под килем». А сколько это будет аршин, метров? Вспомните еще пословицы и поговорки, в которых фигурируют меры длины. Приведите примеры из литературы.

Задача измерения длин кривых линий, конечно, труднее практически и сложнее теоретически, чем измерение отрезков прямых. Но мы ее решение сводим к измерению отрезков.

Первый способ. Выкладываем нитку или веревку по форме измеряемой кривой, а затем вытягиваем ее в отрезок и измеряем. Так можно измерять длину окружности, обхват дерева и др.

Второй способ. Разбиваем измеряемую кривую на небольшие участки, каждый из которых можно считать отрезком. Измеряем каждый отрезок и складываем результаты измерений. По существу, именно так мы и поступаем, когда измеряем шагами длину дороги.

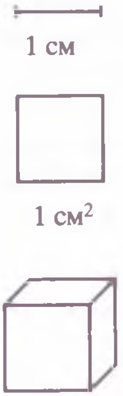
4. Приведите примеры кривых, длину которых удобно измерять одним из этих способов.

11 Измерение площади и объема

«...Потом Мэри Поппинс поставила градусник себе самой, подержала его одно мгновение и вытащила. «Полное совершенство во всех отношениях», — прочитала она, и самодовольная улыбка заиграла на ее лице...» Трудно сказать, в каких единицах Мэри Поппинс измерила свое совершенство, поэтому мы поговорим о более простом и привычном, а именно об измерении площадей и объемов.

Что же можно взять в качестве единицы площади или объема? Очевидно, что исходить нужно из уже имеющихся единиц длины. Далеко не сразу человек додумался до квадратных и кубических единиц. Что это такое?

Возьмем квадрат со стороной 1 м. Его площадь будем считать равной одному квадратному метру ($м^2$). А площадь квадрата со стороной 1 см равна 1 квадратному сантиметру (рис. 71).



1 см

1 $см^2$

1 $см^3$

Рис. 71

В 1 $м^2$ укладывается $100 \times 100 = 10\,000$ $см^2$, а в 1 $см^2$ будет $10 \times 10 = 100$ $мм^2$.

Нетрудно найти площадь фигуры, составленной из квадратных метров или квадратных сантиметров или из тех и других. А как быть, если фигура произвольна?

Возьмем лист клетчатой бумаги и нарисуем на нем какую-нибудь фигуру (рис. 72). Как мы видим, ровно 16 целых клеток содержится внутри фигуры. А самое меньшее число клеток, покрывающих фигуру, равно 40. Таким образом, площадь фигуры больше 16 клеток, но меньше 40. Если считать, что одна клетка есть квадратный сантиметр, то площадь больше 16 $см^2$. Величина 16 $см^2$ есть площадь фигуры, измеренная с недостатком. Правда, к сожалению, ошибка равна не 1 $см^2$, а существенно больше. Площадь фигуры с избытком равна 40 $см^2$.

Самое лучшее в данной ситуации, если мы в качестве значения площади возьмем полусумму измерений с недостатком и избытком. Получим приближенное значение площади $\frac{16 + 40}{2} = 28$ $см^2$. Ошибка при этом будет меньше, чем $28 - 16 = 40 - 28 = 12$ $см^2$. Объясните, почему ошибка меньше указанной величины.

Как поступить, чтобы найти площадь фигуры точнее? Для этого надо дробить квадратную единицу. В 1 $см^2$ укладывается $10 \times 10 = 100$ $мм^2$. Будем продолжать заполнять площадь фигуры квадратными миллиметрами до тех пор, пока это возможно. Прибавив соответствующее количество квадратных миллиметров к ранее найденной величине, мы вычислим площадь фигуры с недостатком, но уже точнее. Продолжая покрывать фигуру квадратными миллиметрами, мы найдем ее площадь с избытком.

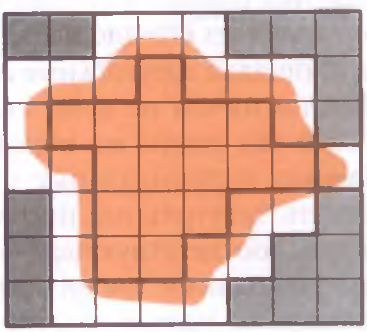


Рис. 72

Затем вновь возьмем полусумму полученных значений. Продолжая этот процесс, можно определить площадь еще точнее. Так же можно поступить и с пространственной фигурой. В качестве единицы объема можно выбрать куб с ребром, равным соответствующей линейной единице. Получим 1 кубическую единицу — метр, сантиметр, аршин, фут и т. д. Поскольку в 1 м^3 $100 \times 100 \times 100 = 1\,000\,000$ см^3, то 1 м^3 в миллион раз больше, чем 1 см^3.

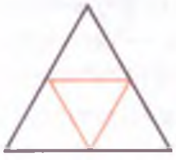
1. Сколько квадратных миллиметров в одном квадратном километре,
квадратных аршинов в квадратной версте,
квадратных дюймов в одном квадратном ярде,
квадратных километров в одной квадратной миле,
кубических сантиметров в одном кубическом километре,
кубических вершков в одной кубической сажени,
кубических футов в одном кубическом аршине?

А теперь вновь зададим вопрос: «Почему?» Почему для получения единиц площадей и объемов мы использовали квадрат и куб? Почему бы нам не воспользоваться для измерения площадей треугольным сантиметром, взяв за единицу треугольник, у которого все стороны равны 1 см? Или даже круглым сантиметром?

Что касается круглого сантиметра, то здесь неудобство сразу бросается в глаза: непересекающимися кругами нельзя заполнить плоскость. Зато треугольниками можно. В связи с этим решите задачу.

2. Каждая из сторон треугольника равна 7 см. Сколько треугольных сантиметров составляет его площадь?

В общем, для измерения площадей треугольные сантиметры вполне подходят. Они ничем не хуже квадратных сантиметров. Но если мы таким же образом введем для измерения объемов пирамидальные единицы, т. е. будем использовать треугольные пирамиды, все ребра которых равны соответствующей единице длины, то столкнемся с большими трудностями. Оказывается, такими пирамидами нельзя заполнить пространство, и вообще, с измерениями в пространстве все обстоит гораздо сложнее, чем на плоскости. Вот один пример в виде задачи.



3. Треугольник, каждая из сторон которого 2 см, легко разрезать на четыре треугольника со стороной 1 см. А теперь возьмем треугольную пирамиду с ребрами по 2 см. На сколько частей оказалась разрезанной исходная пирамида плоскостями, делящими ее ребра пополам? Все ли части являются пирамидами?

При решении практических задач на измерение объема не обязательно разбивать пространство на кубические единицы, а затем мельчить на меньшие кубики. Можно поступить следующим образом.

Изготовим сосуд в виде единичного куба и заполним его какой-нибудь жидкостью, например водой. Тогда получившееся КОЛИЧЕСТВО воды (разумеется, при той же температуре) и будет соответствовать объему одной кубической единицы. Теперь, разливая это количество воды в различные по форме сосуды, мы будем получать единичные объемы различной формы. Именно так во многих практических ситуациях человек и поступает. Как известно, 1 л соответствует объему 1 дм^3. Большинство бутылок, выпускаемых в нашей стране, вмещает объемы $\frac{1}{3}$ л или $\frac{1}{2}$ л. С их помощью нетрудно измерить объемы самых разных сосудов с точностью, достаточной в хозяйстве.

Для измерения площадей такой простой способ мы предложить не можем, хотя здесь также, разрезая квадрат на части и перекладывая эти части, можно получать фигуры единичной площади и различной конфигурации.

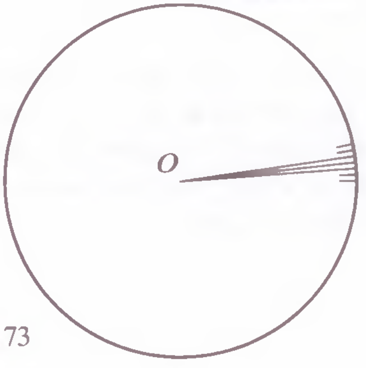


Рис. 73

Кроме длин, площадей и объемов в геометрии надо еще уметь измерять углы. Единица измерения угла, как мы знаем, — градус. Градус можно определить следующим образом. Возьмем произвольную окружность с центром O (рис. 73). Разделим ее на 360 равных частей — дуг. Если мы соединим центр окружности (точку O) с точками деления, то получим 360 равных углов, каждый из которых равен 1°. Дуги окружности также измеряются в градусах. Каждая из получившихся дуг равна 1°. Разделив каждый градус на 60 равных частей, получим более мелкую единицу угла — минуту. Минуты обозначают значком ′. Одна шестидесятая часть минуты — секунда. Обозначается двумя штрихами ″. Запись 78°16′25″ читается так: 78 градусов 16 минут 25 секунд. Как видим,

Дольные единицы углов называют, как и единицы времени.

В жизни человеку приходится измерять множество других различных величин: время, массу, скорость, громкость звука, силу света и многое другое. Не так уж редки ситуации, когда мы с помощью единицы одного вида измеряем не соответствующую ей величину. Например, говоря о расстоянии между двумя городами, мы указываем время, в течение которого можно доехать из одного города до другого. И это гораздо удобнее, чем указывать расстояние. При помощи песочных часов время измеряется в единицах объема — объема пересыпавшегося песка. Попытайтесь привести другие примеры такого рода.

Во многих случаях, чтобы измерить какую-то величину, приходится проявлять большую изобретательность. Ведь нельзя так просто взять и измерить радиус земного шара, площадь океана и многое другое. А это необходимо знать человеку. Помните, в разделе 5 была дана задача об измерении диагонали куба? А вот еще подобная задача.

4. Предложите способ, с помощью которого на практике можно измерить: толщину бумажного листа, объем булыжника, вместимость чайной ложки (ее объем). Придумайте свои задачи на измерение каких-то величин, требующие изобретательности.

12 Вычисление длины, площади и объема

В книге П. Л. Трэверс «Мэри Поппинс» в одном из эпизодов Кошка задает вопросы Королю. «Первый вопрос: «Высоко ли до неба?» Король удовлетворенно хмыкнул. Это был вопрос как раз в его вкусе, и он улыбнулся с видом превосходства.
— Ну, конечно, — начал он, — это понятие относительное, если мы будем измерять высоту от уровня моря — результат будет один. Если с вершины горы — другой. И приняв все это в расчет, а также определив широту и долготу, учитывая данные метеорологии, психологии, геологии, топологии и болтологии, а также астрономии и физиологии, статистики, лингвистики, беллетристики и мистики, мы можем...»

К сожалению, мы вынуждены прервать цитату. Желающие могут прочесть книгу и узнать, чем закончился этот разговор. Как ни странно, но Король прав. Задача измерения весьма трудная, и одной изобретательности недостаточно. Надо многое знать — законы природы, свойства фигур, математические формулы.

Так, например, зная, что звук в воздухе распространяется со скоростью 330 м/с (за 1 с проходит 330 м), а свет практически мгновенно, мы без труда определим, на каком расстоянии примерно идет гроза, если измерим интервал времени между ударом молнии и последующим раскатом грома.

В разделе 11 мы решили несколько практических задач на измерение величин. А как быть, если требуется измерить высоту дерева, ширину реки или объем большого камня, который трудно поднять даже нескольким силачам? Прежде чем ответить на этот вопрос, решим следующие задачи.

1. Увеличьте ломаную на рисунке 74, *а* в 2 раза так, чтобы ее форма не изменилась. Нарисуйте какую-нибудь ломаную для соседа по парте. Пусть он удвоит ее длину, сохранив прежнюю форму. На рисунке 74, *б*

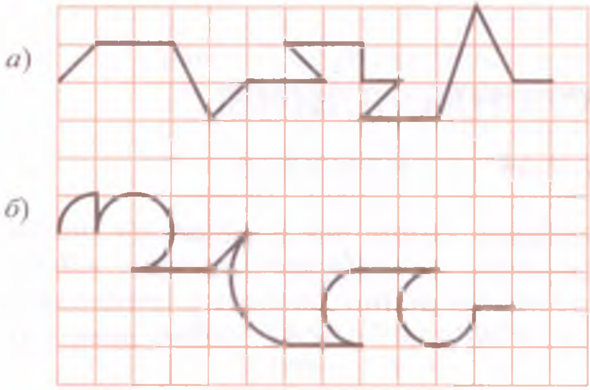


Рис. 74

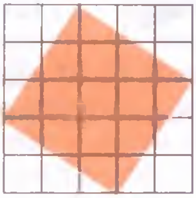


Рис. 75

изображена линия, состоящая из отрезков прямых и дуг окружности. Как удвоить эту линию?

2. Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 2 раза? в 3 раза? в $2\frac{1}{3}$ раза? Как изменится площадь треугольника, если каждую его сторону увеличить в 2 раза? в 3 раза? в $2\frac{1}{3}$ раза?

3. Ребро куба увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличится его объем? Если каждое ребро пирамиды увеличить в 3 раза, то во сколько раз возрастет ее объем?

4. Покажите, что площадь квадрата на рисунке 75 равна 13 клеткам.

5. Начертите на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого равна 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 20, 25, 26 клеткам.

6. Какая часть площади фигур, изображенных на рисунке 76, закрашена?

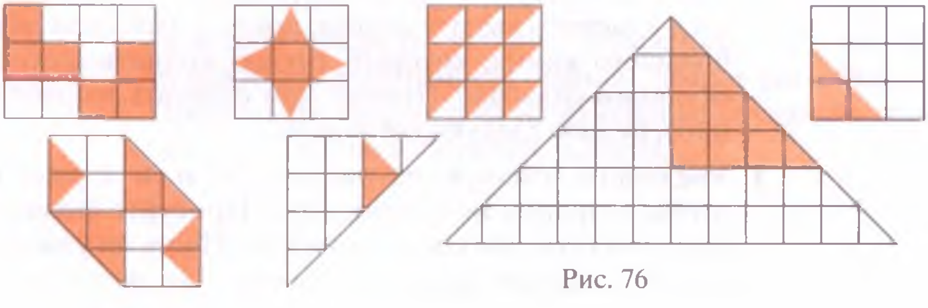


Рис. 76

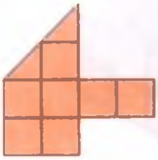


Рис. 77

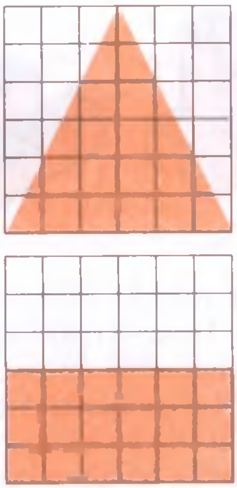


Рис. 78

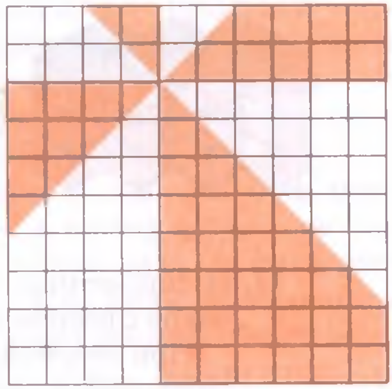


Рис. 79

7. На рисунке 77 изображена фигура площадью 2 $см^2$. Нарисуйте еще две фигуры площадью 2 $см^2$. Нарисуйте несколько фигур площадью 3 $см^2$.

8. Найдите площади каждой части танграма, если сторона клетки на рисунке 66 равна 1.

9. Покажите, что треугольник и прямоугольник на рисунке 78 имеют одинаковые площади.

10. Через точку внутри квадрата проведены прямые по сторонам и диагоналям клеток (рис. 79). Докажите, что сумма площадей закрашенных частей равна сумме площадей незакрашенных частей.

11. Противоположные стороны шестиугольника, изображенного на рисунке 80, равны. Взяв три вершины шестиугольника через одну, получим треугольник. Покажите, что площадь этого треугольника равна половине площади шестиугольника.

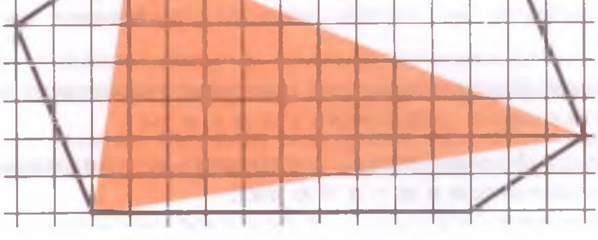


Рис. 80

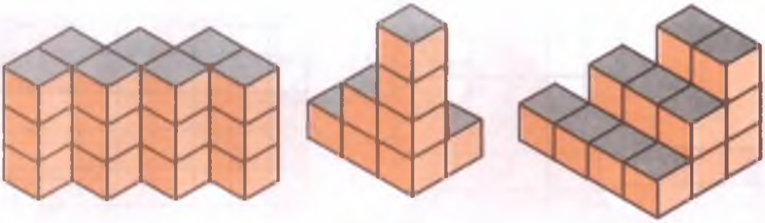


Рис. 81

12. Изображенные на рисунке 81 тела составлены из кубиков с ребром в 1 см. Подсчитайте объемы тел.

При решении большинства предыдущих задач мы опирались на некоторые свойства фигур. Эти свойства справедливы не только для квадратов, треугольников, кубов. Они являются общими свойствами произвольных фигур. Сформулируем их.

➔ ***Каждая плоская фигура или пространственное тело имеет форму и размеры.***

Равные фигуры — это фигуры, равные по размерам и имеющие одинаковую форму.

Если две различные плоские фигуры можно разрезать на одинаковые части, то эти фигуры будут иметь равные площади.

Такие фигуры называют РАВНОСОСТАВЛЕННЫМИ. Фигуры, имеющие равные площади, называют РАВНОВЕЛИКИМИ.

Плоские равновеликие многоугольники также являются равносоставленными. Иными словами,

➔ ***Многоугольник всегда можно перекроить в любой другой многоугольник с такой же площадью.***

Объемные тела, составленные из одинаковых частей, имеют одинаковый объем.

В отличие от многоугольников, два многогранника, имеющие одинаковый объем, не всегда можно разделить на одинаковые части.

Если, не меняя формы плоской фигуры, увеличить ее размеры в n раз, то ее площадь увеличится в $n \times n$ раз.

Если, не меняя формы тела, увеличить его размеры в n раз, то его объем увеличится в $n \times n \times n$ раз.

Используя эти свойства, можно предложить практический способ вычисления размеров больших предметов. Основная идея — постараться каким-то образом изготовить уменьшенную копию той фигуры, параметры которой надо измерить.

Вот небольшая история о том, как отец одного школьника сумел измерить высоту дерева при помощи... лужи. Однажды сын проходил с отцом по двору. Недавно прошел дождь, и во дворе было много небольших луж. Посреди двора росло большое дерево. Сын спросил отца: «Чему равна высота этого дерева?» На этот вопрос отец ответил: «Давай не будем гадать, а вычислим его высоту. Я знаю свой рост — 180 см. Мне надо знать, на какой высоте расположены глаза. Думаю, мы не сильно ошибемся, если будем считать это расстояние равным 170 см. Мой шаг равен 90 см... А впрочем, это не важно. Сейчас я встану так, чтобы я мог видеть в этой луже отражение вершины дерева. Теперь подсчитаем, сколько шагов от меня до лужи. Получилось три шага. Так, а чему равно расстояние от лужи до дерева? ...30 шагов. Значит, высота дерева равна...»

13. Сделайте картинку, иллюстрирующую ситуацию, описанную в рассказе, и ответьте на вопрос, чему равна высота дерева.

При решении задач на нахождение тех или иных величин большую пользу могут принести формулы, позволяющие выразить искомые величины через другие, известные или легко находимые.

Простейшие из них — формулы для вычисления площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда.

→ ***Если a и b — длины сторон прямоугольника (в каких-то единицах), то его площадь равна a × b квадратных единиц.***

Если a, b и c — длина, высота и ширина прямоугольного параллелепипеда, то его объем равен a × b × c кубических единиц.

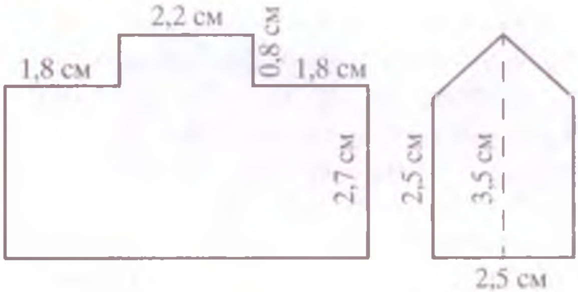


Рис. 82

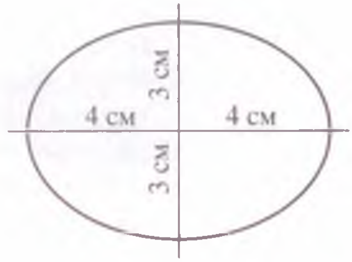


Рис. 83

14. Найдите площади фигур, изображенных на рисунке 82.

15. Нарисуйте овальную линию той же длины, что и на рисунке 83, но ограничивающую фигуру площадью на 1 см^2 больше.

13 Окружность

В одном из своих стихотворений поэт Павел Коган сказал: «Я с детства не любил овал, я с детства угол рисовал...» На это ему возразил другой поэт, Наум Коржавин: «Меня, наверно, Бог не звал и вкусом не снабдил утонченным. Я с детства полюбил овал за то, что он такой законченный».

Но все же не стоит противопоставлять друг другу угол и овал, треугольник и окружность. Среди всевозможных плоских фигур выделяются две главные: треугольник и окружность. Эти фигуры известны нам всем с раннего детства. Любой первоклассник без труда найдет слова, объясняющие, что такое треугольник. Возможно, он скажет что-то вроде: «Возьмем три точки. Если их соединить отрезками, то получится треугольник». Конечно, назвать это описание математически точным определением треугольника нельзя. Но суть выражена достаточно ясно.

Следует отметить, что математики очень любят давать определения всем встречающимся в их науке понятиям, даже самым общеизвестным, таким, как треугольник. Существуют правила, которым должно удовлетворять определение. Так, если мы скажем, что «треугольник — это многоугольник, у которого три стороны и три вершины», это значит, что мы свели понятие «треугольник» к более широкому понятию «многоугольник». А это, в свою очередь, означает, что понятие «многоугольник» должно быть определено раньше.

Оказывается, дать определение даже самым общеизвестным понятиям не так просто, как это может показаться на первый взгляд. Попробуйте поиграть в определения и определить такие понятия, как стул, школа, веселье, бег, отдых, обед и т. д., и вы убедитесь в этом.

Но вернемся к окружности. Известный математик Гротендик, вспоминая свои школьные годы, заметил, что увлекся математикой после того, когда узнал определение окружности. Он понимал, что такое треугольник, в смысле высказывания нашего первоклассника. Но никак не мог понять, что такое окружность. Ведь эта линия в каждой точке загибается!

Что же такое окружность?

Оказывается, эта линия определяется совсем иначе, чем треугольник и вообще многоугольник.

Окружность — это линия, состоящая из всех точек плоскости, которые находятся на заданном расстоянии от одной точки плоскости, называемой центром окружности.

Рис. 84

На рисунке 84 изображена окружность, отмечен ее центр — точка O, проведены два отрезка: OC и AB. Отрезок OC соединяет центр окружности с точкой на окружности. Он называется РАДИУСОМ (по-латыни radius — «спица в колесе»). Отрезок AB

соединяет две точки окружности и проходит через ее центр. Это ДИАМЕТР окружности (в переводе с греческого — «поперечник»).

Сколько можно провести в окружности радиусов и диаметров? Как связаны между собой радиус и диаметр одной окружности?

Окружность — удивительно гармоничная фигура, древние греки считали ее самой совершенной. Совершенство окружности — в расположении всех ее точек на одинаковом расстоянии от центра. Именно поэтому

Окружность — единственная кривая, которая может «скользить сама по себе», вращаясь вокруг центра.

Основное свойство окружности дает ответ на вопросы, почему для ее вычерчивания используют циркуль и почему колеса делают круглыми, а не квадратными или, например, треугольными. Подумайте и вы над этими вопросами.

Кстати, о колесе. Это одно из самых великих изобретений человечества. Оказывается, додуматься до колеса было не так просто, как это может показаться. Ведь даже ацтеки, жившие в Мексике, почти до XVI в. не знали колеса.

Окружность обладает еще одним интересным свойством. Возьмем веревочку и свяжем ее в кольцо, положив полученное кольцо на плоскость, сделаем из него разные фигуры: квадрат, треугольник, окружность и т. д. (рис. 85).

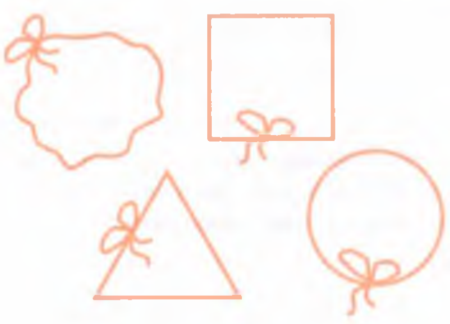


Рис. 85

Площадь, ограниченная окружностью (т. е. площадь круга), — наибольшая среди полученных таким образом площадей.

Окружность — это замкнутая кривая линия. Она имеет длину.

Круг — плоская фигура, его характеризует ПЛОЩАДЬ.

С площадью круга связана одна из самых знаменитых задач древности — ЗАДАЧА О КВАДРАТУРЕ КРУГА. Требовалось построить с помощью циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Поиски квадратуры круга продолжались четыре тысячелетия! Лишь в 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман доказал, что с помощью циркуля и линейки эта задача неразрешима.

Как нарисовать окружность?

Известно, что для изображения окружности служит циркуль. Гораздо труднее нарисовать окружность от руки. Попробуйте сделать это сами. Не правда ли, получается какой-то овал, лишь отдаленно напоминающий окружность? Конечно, опытные, тренированные люди весьма ловко одним росчерком изображают окружность. Рассказывают, что великий немецкий художник Альбрехт Дюрер одним движением руки мог столь точно нарисовать окружность, что последующая проверка при помощи циркуля не показывала никаких отклонений.

Посоревнуйтесь с друзьями, кто из вас лучше изобразит окружность без циркуля.

При вычерчивании окружности на клетчатой бумаге стоит запомнить одно правило, позволяющее сделать нужное изображение от руки. Правда, речь идет об изображении окружности определенного размера. Правило это записывается в виде трех пар чисел: 3—1, 1—1, 1—3.

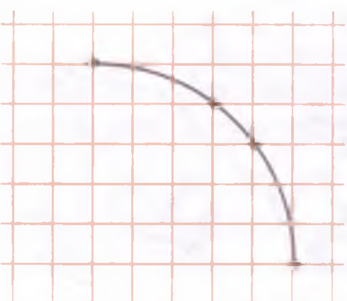


Рис. 86

Действовать по этому правилу нужно так. Возьмем пересечение линий (узел) клетчатой бумаги (рис. 86). Отступив на три клетки вправо и на одну вниз, поставим вторую точку. Отступая от второй точки по одной клетке вправо и вниз, находим третью точку. Четвертая точка находится на расстоянии одной клетки вправо и трех вниз от третьей точки.

Скольким клеткам равен радиус такой окружности?

Соединив плавной линией полученные точки, мы весьма похоже изобразим четверть окружности.

Много интересных задач связано с окружностью и кругом.

Вот несколько таких задач:

1. Почему канализационные люки делают круглыми, а не квадратными?

2. Возьмите прямоугольный листок бумаги, который можно накрыть кругом. Перегните листок (рис. 87). Можно ли теперь накрыть его тем же кругом?

3. Расположите пять одинаковых монет так, чтобы каждая из них касалась четырех остальных.

4. Существует ли кольцо, изображенное на рисунке 88, в действительности, или на рисунке допущена ошибка?

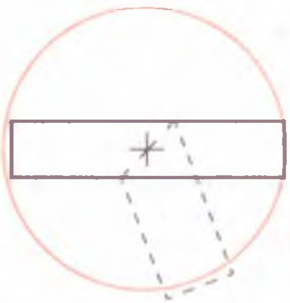


Рис. 87

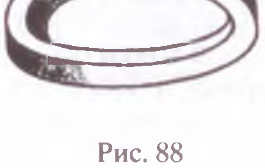


Рис. 88

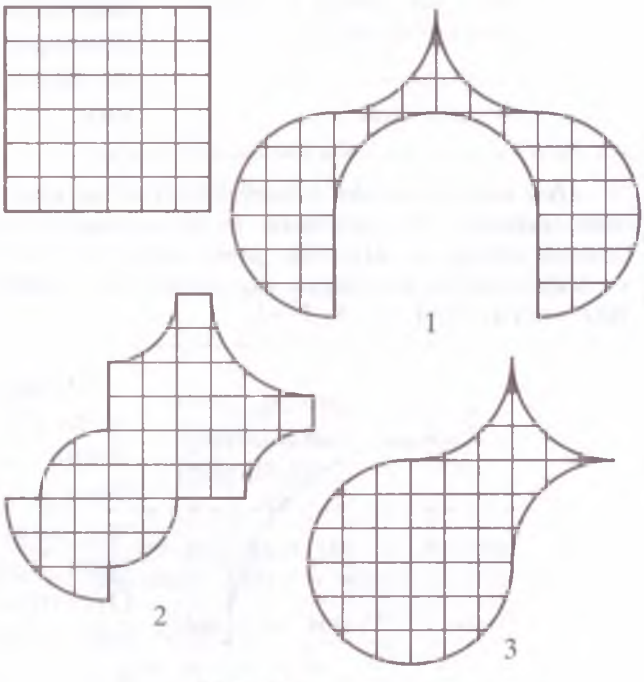


Рис. 89

5. На какие части надо разрезать квадрат, чтобы сложить из них фигуры, изображенные на рисунке 89? Бумага в клеточку облегчит решение.

6. На столе один пятак лежит неподвижно, а другой катится вокруг первого, касаясь его. Сколько раз он обернется вокруг своего центра, прежде чем вернется в исходное положение?

7. Вокруг небольшого курортного городка расположены три круглых не соединяющихся между собой озера: большое, средних размеров и маленькое. Отдыхающие, в каком бы направлении ни отправлялись на загородную прогулку, двигаясь по прямой, обязательно приходили к одному из озер. Может ли такое быть? Как расположены городок и озера?

8. На что пойдет больше краски: на окрашивание квадрата или этого необычного кольца (рис. 90)?

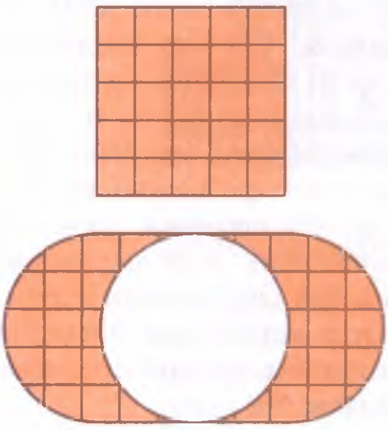


Рис. 90

Окружность как совершенная геометрическая форма всегда привлекала к себе внимание художников, архитекторов. В неповторимом архитектурном облике Санкт-Петербурга восторг и удивление вызывает «чугунное кружево» — садовые ограды, перила мостов и набережных, балконные решетки, фонари. Четко просматриваемое на фоне фасадов зданий летом, в изморози зимой, оно придает особое

Рис. 91. Ворота Таврического дворца. С.-Петербург

Рис. 92. *К. Росси*. Арка Главного штаба. С.-Петербург

очарование городу. На рисунке 91 дан эскиз ворот Таврического дворца, созданного в конце XVIII в. архитектором Ф. И. Волковым. Особую воздушность придают воротам окружности, сплетенные в орнамент.

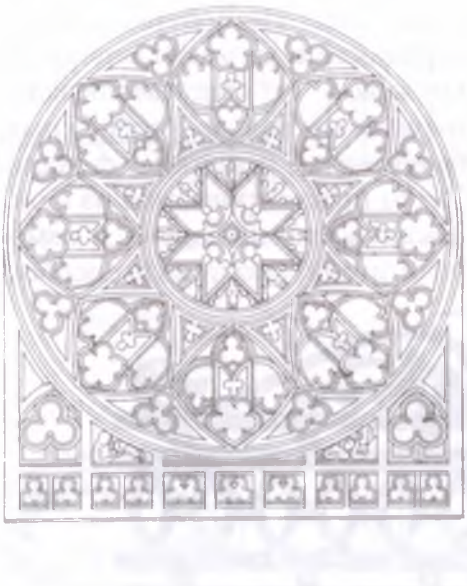


Рис. 93. Витраж собора св. Витта. Прага

Торжественность и устремленность ввысь — такой эффект в архитектуре зданий достигается использованием арок, представляющих дуги окружностей (рис. 92). Окружности и дуги являются основными элементами готических храмов средневековья (рис. 93).

Архитектура православных церквей включает в себя как обязательные элементы купола, арки, округлые своды, что зрительно увеличивает пространство, создает эффект полета, легкости (рис. 94).

В создании орнаментов с окружностями часто используются приемы деления окружности на равные части.

Рис. 94. Архангельский собор. Москва

Деление окружности на части

Представим, что радиус окружности — это часовая стрелка на круглом циферблате часов. Отметим, что начальное положение — 12 ч. В 3 ч угол между радиусом и его начальным положением равен 90°, в 6 ч — 180°, а за 12 ч радиус возвратится в исходное положение, описав угол 360°.

Проведем в окружности три радиуса так, чтобы углы между ними были равны 360° : 3 = 120°. Эти радиусы разделят окружность на три равные части — дуги по 120°.

→ ***Соединив последовательно точки деления отрезками, получим треугольник, вписанный в окружность. Вообще, вписанным в окружность называется любой треугольник, все вершины которого лежат на этой окружности.***

На рисунке 95 показано, как вписать в окружность равносторонний треугольник. Сделайте необходимые вычисления и впишите в окружность равносторонние (правильные) пятиугольник, шестиугольник и восьмиугольник. Затем соедините вершины так, чтобы получить пяти-, шести- и восьмиконечную звезду.

➔ ***Равносторонний многоугольник, вписанный в окружность, называется правильным.***

Как построить правильный шестиугольник? Например, так. Возьмем шесть правильных равных между собой треугольников и расположим их рядом так, чтобы у них была общая вершина. Вместе они составят правильный шестиугольник. Общую вершину треугольников будем считать центром окружности с радиусом, равным стороне треугольника. Остальные вершины треугольников окажутся на окружности, т. е.

➔ ***Правильный шестиугольник вписан в окружность, и все стороны равны радиусу этой окружности.***

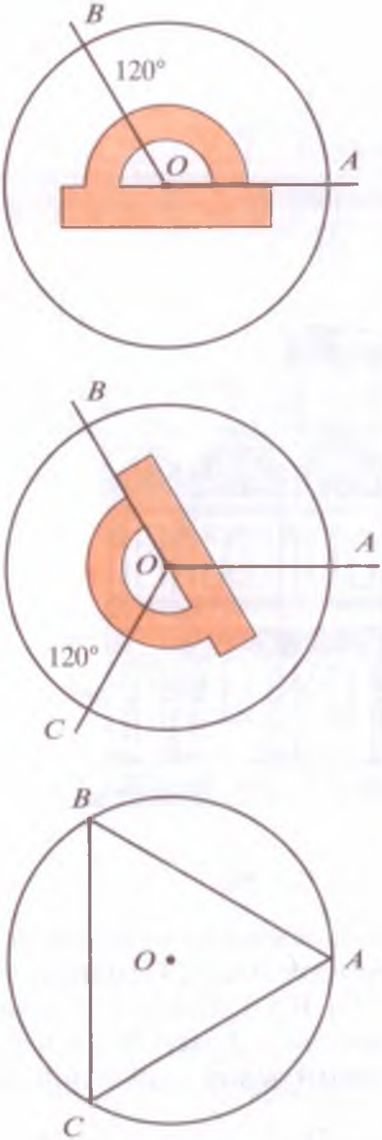


Рис. 95

Зная это, можно вписывать в окружность правильные шестиугольники и треугольники без транспортира, по всем классическим правилам, пользуясь только циркулем и линейкой. Для этого достаточно циркулем, не меняя раствора, разделить окружность на равные части, а затем точки деления соединить последовательно или через одну.

9. Первая слева из трех изображенных на рисунке 96 фигур есть «инь и янь» — знаменитый китайский символ равновесия темных и светлых сил в природе. Оказывается, проведя лишь одну линию, фигуру можно разделить на две равные части, причем на равные части будет разделена каждая из частей — черная и белая. Найдите эту линию.

Поскольку задача достаточно трудная, сделаем подсказку: нужная линия имеет ту же форму, что и граница, разделяющая черную и белую части. Две другие фигуры на этом рисунке составлены из различных окружностей. Попробуйте понять, как это сделано, и перерисовать фигуры.

10. Хозяйка, приведя козу на пастбище, вбила два колышка на расстоянии 10 м один от другого, натянула между колышками веревку с кольцом так, что кольцо может скользить от колышка к колышку, а к кольцу веревкой длиной 5 м привязала козу. Нарисуйте фигуру, состоящую из точек, до которых может добраться коза.

11. На берегу глубокого озера круглой формы диаметром 100 м вбит колышек A, в середине озера расположен остров, а в его центре вбит колышек B (рис. 97). У человека, который не умеет плавать, есть веревка. Ее длина немного больше 100 м. Каким образом, используя веревку и колышки, он может перебраться на остров?

12. В плоскости расположены 17 шестеренок — первая зацеплена со второй, вторая — с третьей... последняя — с первой. Может ли эта система вращаться?

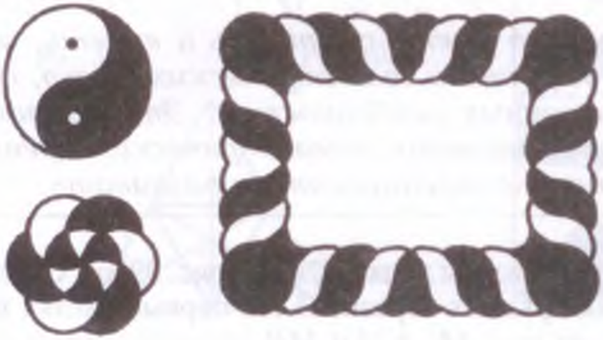


Рис. 96

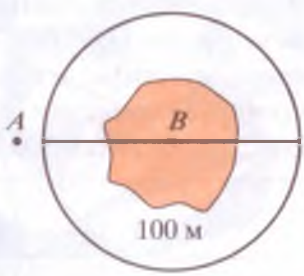


Рис. 97

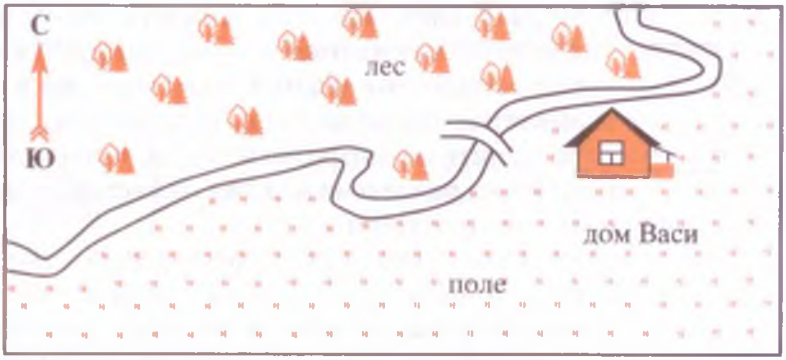


Рис. 98

13. Тяжелая платформа лежит на круглых бревнах. Задний конец платформы расположен в 5 м от последнего бревна. Платформу катят по бревнам. На сколько метров передвинется передняя часть платформы, когда задняя поравняется с последним бревном?

14. Васин дом расположен на берегу реки, с одной стороны которой лес, а с другой — поле. Вася знает, что по лесу он может передвигаться со скоростью 3 км/ч, а по полю — со скоростью 4 км/ч. Он взял карту этой местности (рис. 98; масштаб карты 1 : 100 000, что означает уменьшение всех настоящих размеров в 100 000 раз) и решил отметить на этой карте все точки, до которых он может дойти за 1 ч. Помогите Васе сделать это. Считайте речку очень узкой и не учитывайте время на переход по мосту.

14 Геометрический тренинг

В геометрии очень важно уметь смотреть и видеть, замечать различные особенности геометрических фигур, делать выводы из замеченных особенностей. Эти умения, которые вместе можно назвать «геометрическим зрением», необходимо постоянно тренировать и развивать.

---

1. На отрезке AB взяты точки K и M (рис. 99, *а*). Сколько получили разных отрезков? На первый взгляд кажется, что их три: AK, KM и MB. Но если внимател*ь-*

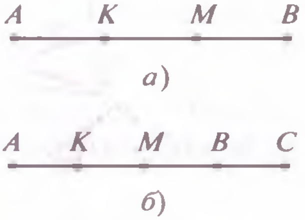


Рис. 99

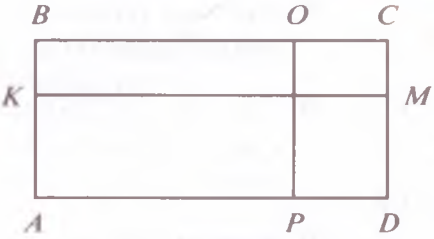


Рис. 100

Рис. 101

но рассмотреть этот рисунок, то можно найти еще три отрезка: *AM*, *KB* и *AB*. Сколько отрезков изображено на рисунке 99, *б*?

2. Прямоугольник *ABCD* (рис. 100) разделен на части прямыми *KM* и *OP*. Сколько получилось разных прямоугольников? Четыре? Нет! Найдите на этом рисунке девять прямоугольников.

3. Сколько четырехугольников на рисунке 101?

4. Сколько треугольников на рисунке 102?

5. Найдите 27 треугольников в фигуре на рисунке 103.

6. Найдите 47 треугольников в фигуре на рисунке 104.

7. Найдите звезду на рисунке 105.

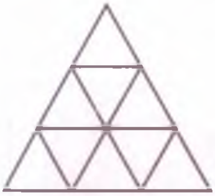


Рис. 102

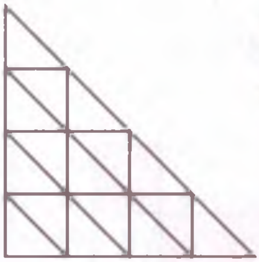


Рис. 103

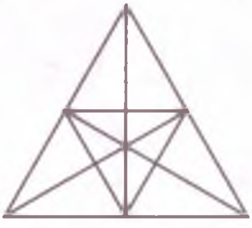


Рис. 104

Рис. 105

8. Сколько различных квадратов с вершинами в данных точках можно начертить на рисунке 106?

Рис. 106

9. Сколько различных равносторонних треугольников с вершинами в данных точках можно начертить на рисунке 107?

Рис. 107

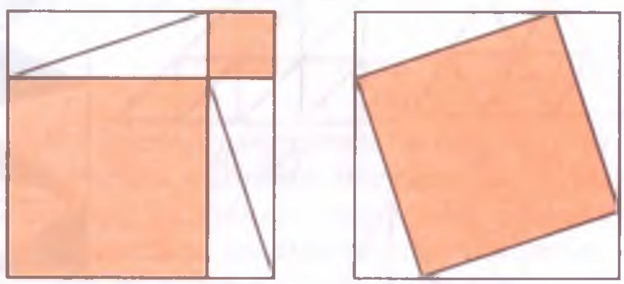
10. Рисунок 108 иллюстрирует доказательство того, что площадь параллелограмма равна площади некоторого прямоугольника. Постарайтесь сформулировать утверждение, которое следует из рисунка 108.

Рис. 108

11. Орнамент состоит из частей, изображенных на рисунке 109. Некоторые части окрашены в оранжевый и черный цвета. Используя тот факт, что если радиус одного круга в два раза больше радиуса другого круга, то площадь первого в четыре раза больше площади второго, покажите, что для окраски частей этого орнамента потребуется равное количество оранжевой и черной краски.

12. Рисунок 110, *а*, *б* иллюстрирует одну из древнейших теорем геометрии — теорему Пифагора. Внимательно рассмотрите эти рисунки. Обратите внимание на треугольники и квадраты. Сравните площади заштрихованных квадратов. Что вы заметили? Может, вы сумеете сами «открыть» эту великую теорему?

Рис. 109



а) *б*)

Рис. 110

15 Топологические опыты

***ТОПОЛОГИЯ** является одним из самых «молодых» разделов современной геометрии. Чтобы получить некоторое представление о топологии, рассмотрим несколько топологических опытов с поверхностями, полученными из бумажной полоски примерно* 30 см *в длину и* 3 см *в ширину.*

Склейте два кольца: одно простое и одно перекрученное (рис. 111). *Перекрученное кольцо получите так, как показано на рисунке.*
Представьте муравья, находящегося на поверхности простого кольца. Удастся ли муравью попасть на обратную, изнаночную сторону кольца, не переползая через край? Конечно же нет! А если муравей ползет по перекрученному кольцу? Попробуйте провести непрерывную линию по одной из сторон перекрученного кольца (будем считать, что это путь муравья). Что вы получили?

Этот опыт провел в середине прошлого века немецкий астроном и геометр Август Мёбиус. Он обнаружил, что на перекрученном кольце линия прошла по обеим сторонам, хотя его карандаш не отрывался от бумаги. Оказывается, у перекрученного кольца (впоследствии его назвали листом МЁБИУСА) имеется только одна сторона! Позже математики открыли еще целый ряд односторонних поверхностей. Но эта, самая первая, положившая начало целому направлению в геометрии, по-прежнему привлекает к себе внимание не только ученых, но и художников (рис. 112).

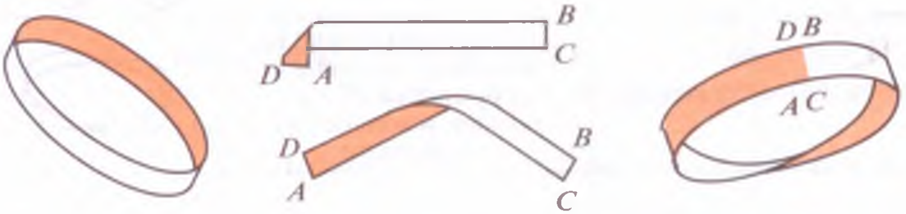


Рис. 111

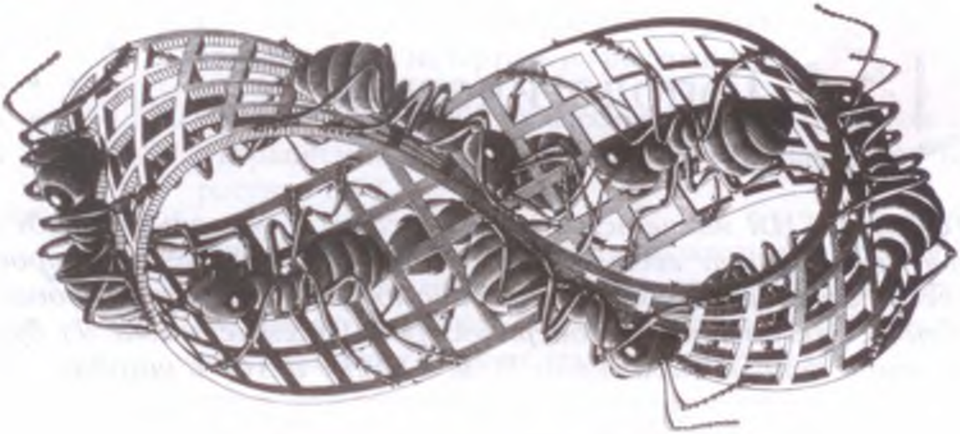


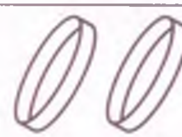
Рис. 112. *М. Эшер.* Лист Мёбиуса

Опыты, которые мы предлагаем вам провести с листом Мёбиуса и подобными ему кольцами, продемонстрируют много интересных и неожиданных свойств.

Несколько перекручиваний

Рис. 113

Разрежьте простое кольцо ножницами вдоль (рис. 113). Что получилось?
Разрежьте перекрученное на пол-оборота кольцо (лист Мёбиуса) вдоль.
Продолжайте перекручивание полоски бумаги перед склеиванием, каждый раз увеличивая число полуоборотов на один. Разрежьте вдоль. Результаты запишите в таблицу.

Число полуоборотов	Результат разрезания	Свойства	Рисунок
0	2 кольца	длина окружности кольца та же, но кольцо в 2 раза у́же	
1	1 кольцо	кольцо перекручено на 2 полуоборота, длина его окружности в 2 раза больше, и кольцо у́же исходного	
2			
...			

Несколько разрезов

Рис. 114

Склейте лист Мёбиуса шириной 5 см. *Что получится, если разрезать его вдоль, отступив от края сначала на* 1 см, *затем на* 2 см, *на* 3 см, *на* 4 см (*рис.* 114)?

Несколько лент

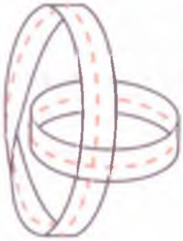


Рис. 115

Приготовьте два кольца: одно простое и одно перекрученное. Склейте их, как показано на рисунке 115, *а затем оба разрежьте вдоль. Каков результат разрезания?*

Солдатик-перевертыш

Рис. 116

Вырежьте из бумаги солдатика (*рис.* 116) *и отправьте его вдоль пунктира, идущего по середине листа Мёбиуса. В каком виде солдатик вернется к месту старта?*

Лист Мёбиуса — один из объектов топологии. Интересно, что с точки зрения топологии гайка, макаронина и кружка — одинаковые объекты. Их роднит то, что каждый из них имеет одно и только одно отверстие. Если бы мы из пластилиновой гайки, не разрывая и не склеивая пластилин, захотели вылепить макаронину или кружку, то нам бы это удалось. А вот кастрюльку с двумя ручками уже не вылепить (в ней две дырки-ручки). Придумайте еще несколько предметов, одинаковых с гайкой с точки зрения топологии. Перечислите несколько «топологических родственников» шара.

Среди букв русского алфавита тоже есть топологически одинаковые буквы. Представьте, что они сделаны из мягкой проволоки. Какие из букв можно преобразовать одну в другую, если не разрывать проволоку в местах соединений и не склеивать концы? Проволоку можно только гнуть и растягивать!

К топологическим относятся и задачи на вычерчивание фигур одним росчерком. В подобных задачах требуется начертить какую-либо фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза по одной и той же линии.

Испытайте свои силы в вычерчивании одним росчерком фигур, изображенных на рисунке 117. Какие-то из этих фигур вам удалось вычертить почти сразу, решение других пришло через некоторое время, а третьи вообще не рисуются. Почему так происходит? Давайте разберемся вместе.

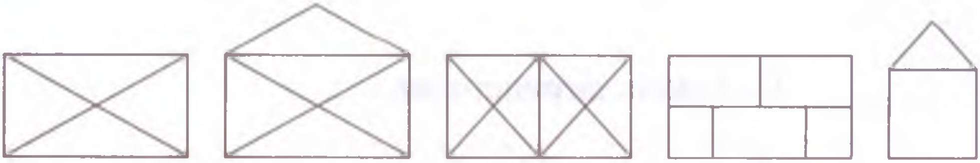


Рис. 117

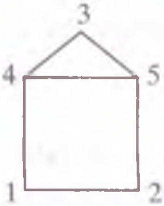


Рис. 118

Начертите связную сеть кривых, как на рисунке 118.

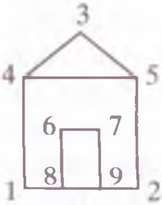


Рис. 119

Сеть таких кривых называют ГРАФОМ (от греческого слова grapho — «пишу»). Условимся точки, в которых соединяются кривые, называть УЗЛАМИ. На нашем графе пять узлов, причем три из них четные (первый, второй и третий — в них соединяется четное число линий), а два нечетные (четвертый и пятый — в них соединяется нечетное число линий). Эту фигуру можно начертить одним росчерком. А вот домик с дверью (рис. 119) — уже иная фигура. Она содержит девять узлов, пять из которых четные, а четыре — нечетные.

Если в фигуре (на графе) число нечетных узлов больше двух, то ее нельзя нарисовать одним росчерком!

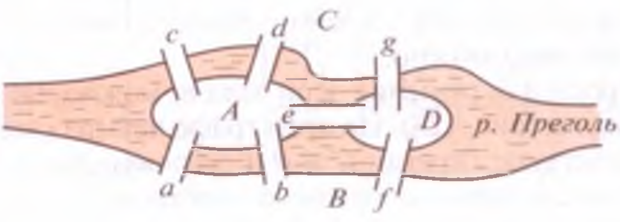


Рис. 120

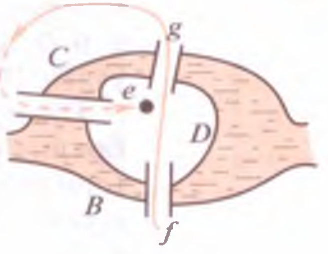


Рис. 121

Покажем это на примере одной известной задачи — задачи «о кенигсбергских мостах», которая положила начало ЗАДАЧАМ НА ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ФИГУР ОДНИМ РОСЧЕРКОМ. Город Кенигсберг был расположен на берегах и двух островах реки Преголь. Различные части города были соединены семью мостами (рис. 120). Совершая прогулки в воскресные дни, горожане заспорили: можно ли выбрать такой маршрут, чтобы пройти один и только один раз по каждому мосту и затем вернуться в начальную точку пути? Долго бы спорили жители города, если бы через Кенигсберг не проезжал Леонард Эйлер. Он заинтересовался спором и... разрешил его. Возможно, он рассуждал примерно так.

К восточному острову (рис. 121) ведут три моста. Если прогулка начинается вне восточного острова, то, поскольку по каждому из трех мостов надо пройти один раз, кончаться она должна на этом острове. (Это можно сравнить с выключением настольной лампы. Будем поочередно включать и выключать настольную лампу, вставляя вилку в розетку и вынимая ее. Если вначале вилка была вынута (света нет), то после трех таких операций вилка окажется в розетке и свет будет включен.) К западному острову (рис. 122) ведут пять мостов, а 5, как и 3, — число нечетное. Отсюда следует, что если прогулка начинается вне западного острова, то заканчивается она на западном острове.

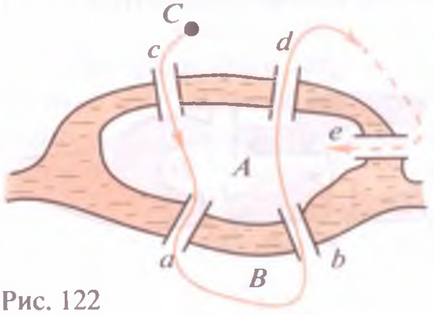


Рис. 122

Но и на южный, и на северный берег также ведут по три моста, и к ним применимо то же рассуждение. Итак, каждый из четырех участков суши, обозначенных буквами A, B, C и D, должен быть либо началом, либо концом прогулки. Но это невозможно.

План города для решения этой задачи можно изобразить графом (рис. 123). На этом графе четыре узла (они соответствуют берегам C и B и островам A и D) и семь кривых, которые обозначают мосты a, b, c, d, e, f, g. Если бы существовал искомый маршрут, то эту сеть кривых можно было бы вычертить одним росчерком. Таким образом, задача об обходе мостов оказалась равносильной задаче о рисовании одним росчерком. А решение задачи о мостах доказывает, что изображенную фигуру нельзя нарисовать одним росчерком. Так же обосновывается наше правило для любой фигуры.

1. Река разделяет город на четыре части, соединенные шестью мостами (рис. 124). Один турист решил обойти все мосты, побывав на каждом из них только один раз. Как это можно сделать, если не требовать обязательного возвращения в тот же район города, из которого начался обход?

2. Добавьте на рисунке 124 еще один мост так, чтобы можно было совершить переход через все мосты, побывав на каждом по одному разу, и вернуться в ту же часть города, откуда началось путешествие.

3. Оса забралась в банку из-под сахара. Банка имеет форму куба. Сможет ли оса последовательно обойти все 12 ребер куба, не проходя дважды по одному ребру? Подпрыгивать и перелетать с места на место она не может.

4. Начертите фигуры (рис. 125) одним росчерком (пронумеруйте отрезки в той последовательности, в какой вы их проходили).

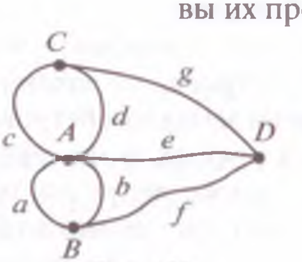


Рис. 123

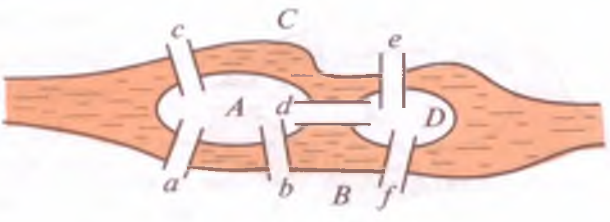


Рис. 124

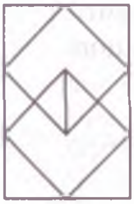


Рис. 125

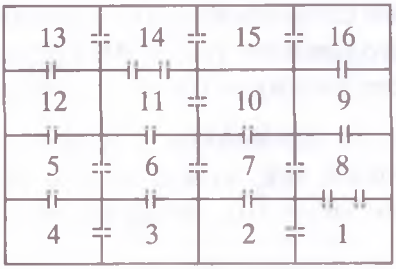


Рис. 126

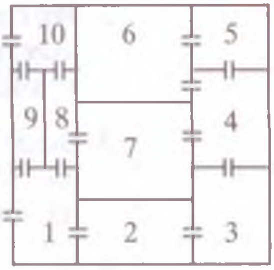


Рис. 127

5. На рисунке 126 изображен план подземного лабиринта (подвала из 16 комнат, соединенных дверьми). Можно ли, начиная с комнаты 1, обойти комнаты так, чтобы пройти через все двери всех комнат только один раз?

В какой комнате закончится такой обход?

Указание. Замените комнаты точками, а двери — дугами и постройте соответствующий граф.

6. На рисунке 127 изображен план подвала из десяти комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение?

7. Докажите, что число нечетных узлов графа всегда четно.

16 Задачи со спичками

Занимательные задачи со спичками хорошо известны и взрослым, и детям. Для их решения нужны только смекалка, способность предвидеть результат и, пожалуй, хорошее воображение. Надеемся, что вы обладаете этими качествами. В работе над задачами можно использовать спички, счетные палочки или просто рисунок на бумаге.

---

1. Расположите 12 спичек так, чтобы получилось пять квадратов. А теперь — чтобы получилось шесть квадратов.

2. Из спичек сложена фигура, состоящая из девяти равных треугольников (рис. 128). Уберите пять спичек так, чтобы осталось пять треугольников. Как это сделать?

3. Возьмите ту же фигуру (см. рис. 128) и переложите шесть спичек так, чтобы получилась фигура, состоящая из шести равных четырехугольников.

4. Из спичек сложена фигура (рис. 129):

а) уберите четыре спички так, чтобы осталось пять квадратов;

б) уберите восемь спичек так, чтобы осталось два квадрата;

в) уберите шесть спичек так, чтобы осталось три квадрата.

5. Из спичек сложена фигура, состоящая из шести равносторонних треугольников (рис. 130). Переложите четыре спички так, чтобы получилось три равносторонних треугольника.

6. Расположите шесть спичек так, чтобы каждая спичка касалась всех остальных спичек.

7. Из десяти спичек выложите три квадрата. Уберите одну спичку и сделайте из оставшихся спичек один квадрат и два ромба.

8. Расположите три спички на столе так, чтобы их головки не касались ни стола, ни друг друга.

9. Восемь спичек уложите так, чтобы образовались один восьмиугольник, два квадрата и восемь треугольников — все в одной фигуре!

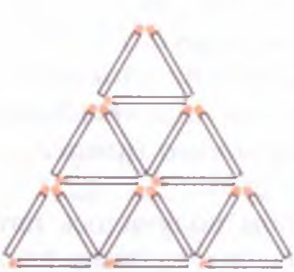


Рис. 128

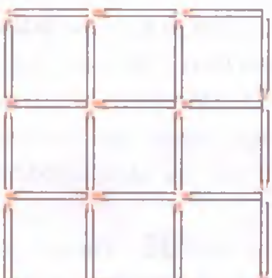


Рис. 129

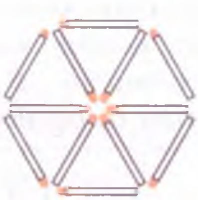


Рис. 130

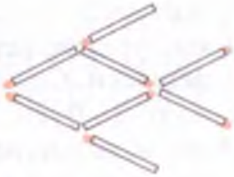


Рис. 131

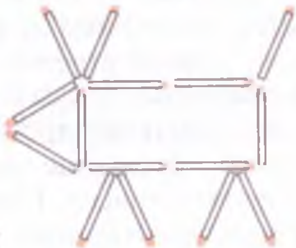


Рис. 132

10. Переложите три спички так, чтобы рыбка (рис. 131) поплыла в противоположную сторону.

11. Дано 12 спичек. Примем каждую из них за единицу длины. Требуется выложить из 12 спичек фигуру, которая охватывала бы площадь в три квадратные единицы. Найдите несколько вариантов.

12. Переложите две спички так, чтобы корова смотрела в противоположную сторону (рис. 132).

13. Придумайте несколько задач со спичками и предложите решить их своим друзьям.

17 Зашифрованная переписка

Играли ли вы когда-нибудь в разведчиков? В этой игре разведчик вынужден вести переписку со своими товарищами так, чтобы никто из посторонних не смог прочитать написанного. Для этого используют шифровки. Об одном из способов шифровки текста вы сейчас узнаете.

Способ решетки

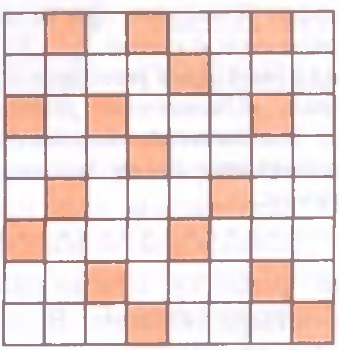


Рис. 133

Из плотной бумаги вырежьте квадрат, разделите его на 64 квадратика и прорежьте окошечки (рис. 133).

Как пользоваться этой решеткой? Пусть необходимо передать следующее сообщение: «Наступление планируется 16 сентября пять утра. Внимание левому флангу. РВС».

а)

	Н		А			С	
				Т			
У		П				Л	
			Е				
	Н				И		
Е				П			
		Л				А	
			Н				И

б)

П	Н	Л	А	Я	Е	С	Р
У	Т	Е	В	Т	Ь	Т	О
У	М	П	У	С	У	Л	Т
Ф	Я	Р	Е	Л	1	А	А
6	Н	Н	С	В	И	Г	Е
Е	Н	Н	У	П	И	Т	М
Я	Р	Л	А	Б	В	А	С
А	Н	Р	Н	И	Я	Е	И

Рис. 134

Наложив решетку на листок бумаги, пишут сообщение в окошечках решетки. Сначала помещается всего 16 букв: наступление плани... Как они расположены, см. на рисунке 134, *а*.

Затем поворачивают решетку против часовой стрелки на 90°. Все написанные буквы закрыты, в новые окошечки продолжают вписывать текст. Еще два поворота, и текст вписан. Если остаются неиспользованные клетки, их заполняют буквами а, б, в... и т. д. (чтобы не было пробелов). Полностью письмо принимает вид, показанный на рисунке 134, *б*. Его ни за что не прочесть человеку, не имеющему шифровального квадрата. А читают так же (накладывая квадрат и поворачивая его против часовой стрелки на 90°). После четвертого поворота текст становится ясен адресату.

Из объяснений понятно, что

Способ шифровки основан на повороте квадрата вокруг его центра. ПОВОРОТ — геометрическое преобразование фигур, при котором свойства фигур не меняются, может измениться лишь положение фигуры, так как каждая ее точка повернется вокруг некоторой точки на угол поворота. Квадрат при повороте на 90° вокруг его центра совместится сам с собой.
Каждая же точка внутри квадрата при четырех поворотах на 90° занимает четыре разных положения. «Окошечки» решетки займут в процессе поворота четыре различных положения. Чтобы все клеточки 64-клеточного квадрата были заполнены буквами, должно быть 64 : 4 = 16 окошечек.

Чтобы составить свою решетку, нужно разбить 64-клеточный квадрат на четыре области. В первой расставить числа от 1 до 16 в обычном порядке. Вторая область получается из первой поворотом по часо-

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Рис. 135

вой стрелке на 90°. Повернув еще на 90°, получим заполнение третьей области, при последнем повороте получается заполнение четвертой области (рис. 135).

Затем выбирают для окошечек любые 16 клеток, заботясь лишь о том, чтобы в их числе не было клеток с одинаковыми номерами. Итак, решетка готова, можно приступать к шифровке!

На 64-клеточном поле можно составить более 4 млрд разных секретных решеток!

Объясним этот факт или, как говорят математики, докажем его. Клетку № 1 можно взять в качестве окошка в четырех местах. В каждом случае можно присоединить клетку № 2, взяв ее также в четырех местах. Следовательно, два окошка можно наметить 4×4, т. е. 16 способами. Три окошка — $4 \times 4 \times 4 = 64$ способами. Рассуждая таким образом, устанавливаем, что 16 окошек можно набрать $4 \times 4 \times 4 \times \ldots \times 4$ раз (произведение 16 четверок). Число это превышает 4 миллиарда. Если полагать расчет преувеличенным в несколько раз (так как неудобно пользоваться решетками с примыкающими друг к другу окошками, и эти случаи надо исключить), то все же остается несколько сотен миллионов различных решеток. Попробуй-ка отыскать ту, которая требуется!

18 Задачи, головоломки, игры

Великий итальянский ученый Галилео Галилей однажды сказал: «Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать».

1. Расставьте 12 стульев в комнате так, чтобы:

а) в двух рядах было по четыре стула, а в одном шесть;

б) у каждой из четырех стен было по четыре стула;

в) два стула стояли посередине комнаты, а остальные — вдоль четырех стен поровну.

2. Расставьте десять стульев так, чтобы у каждой стены комнаты стояло по три стула.

3. В доску вбито 20 гвоздиков (рис. 136). Расстояние между соседними равно 1 см. Натяните нитку длиной 19 см от первого гвоздика до второго так, чтобы она прошла через все гвоздики.

Рис. 136

4. Как выглядит шнуровка туфель (рис. 137) изнутри? Ответ неоднозначен.

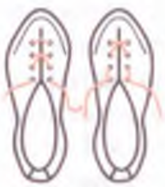
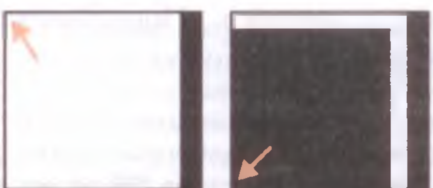


Рис. 137

5. При решении этой головоломки не разрешается делать какие-либо рисунки и манипулировать объектами. У нас есть 10 квадратных карточек со сторонами 10, 9, 8, 7, ..., 1. Карточки, стороны которых четны, — черного цвета, а остальные — белого. Выложим на стол самую большую карточку, т. е. черную, со стороной 10. Затем на нее положим карточку со стороной 9, но не по центру, а как показано на рисунке 138, *а* (в левом верхнем углу). На нее (в левый нижний угол) положим черную карточку со стороной 8 (рис. 138, *б*). Потом на нее кладем следующую по размеру карточку (в правый нижний угол). Продолжаем далее этот процесс, причем положения карточек закручиваются внутрь против часовой стрелки. Какой черно-белый рисунок получится после того, как мы выложим последнюю карточку? Дайте полное описание этого рисунка. Можно проверить себя, вырезав десять таких квадратов или нарисовать их в тетради.



а) *б*)

Рис. 138

6. Дана дощечка с тремя отверстиями: квадратным, круглым и треугольным (рис. 139). Придумайте пробку такой формы, чтобы ею можно было заткнуть каждое из этих отверстий.

Рис. 139

Рис. 140

Рис. 141

Рис. 142

7. Присмотритесь к следующим пятнам на рисунке 140. Что нарисовано на этой картине?

8. Очень сложная замкнутая линия ограничивает на плоскости некоторую область. На чертеже отмечены две точки.

Каким образом можно быстро определить, где (внутри или вне этой области) лежит каждая из точек (рис. 141)?

9. Расставьте 24 стула так, чтобы они стояли в шесть рядов по пять стульев в каждом ряду.

10. Сколькими способами можно прочитать слово «шалаш», двигаясь по прямым, кривым и ломаным дорожкам (рис. 142)?

11. Из семи многоугольников, входящих в танграм, сложите фигуры, показанные на рисунке 143.

12. Участок с четырьмя колодцами, имеющий форму правильного треугольника (рис. 144), надо разделить на такие участки, чтобы они были одинаковы по форме,

Рис. 143

Рис. 144

равны по площади и чтобы на каждом из них было по колодцу. Как это сделать?

Рис. 145

13. Как четырьмя прямыми линиями, не отрывая карандаша от бумаги, перечеркнуть девять точек, расположенных на рисунке 145?

14. Изображенную на рисунке 146 фигуру разделите на шесть частей двумя прямыми.

15. Дан прямоугольник, ширина которого в два раза меньше длины. Разрежьте этот многоугольник:

а) на две части так, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник;

б) на две части так, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник;

в) на три части так, чтобы из них можно было составить квадрат.

16. Разрежьте каждую из фигур, изображенных на рисунке 147, на четыре равные части.

17. Вырежьте из плотной бумаги (картона) круг диаметром 6 см. Затем в листе обычной бумаги вырежьте круглое отверстие диаметром 4 см. Как вы думаете, можно ли ваш круг, не сминая его, протащить через проделанное в бумаге отверстие?

18. Детали 1—7 вдвинуты в футляр (рис. 148) сверху. Каждая из них вдвигалась строго по вертикали. В какой последовательности производилась укладка?

19. Для того чтобы сделать трубочку, мы отрываем полоску от газеты. При этом один край остается ровным, а другой будет рваным. Затем мы начинаем скручивать полоску с одного из углов. Допустим, мы хотим спрятать рваный край. С какого угла нужно начинать?

Рис. 146

Рис. 147

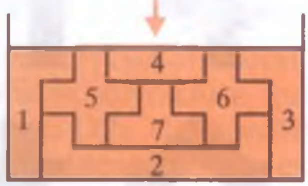


Рис. 148

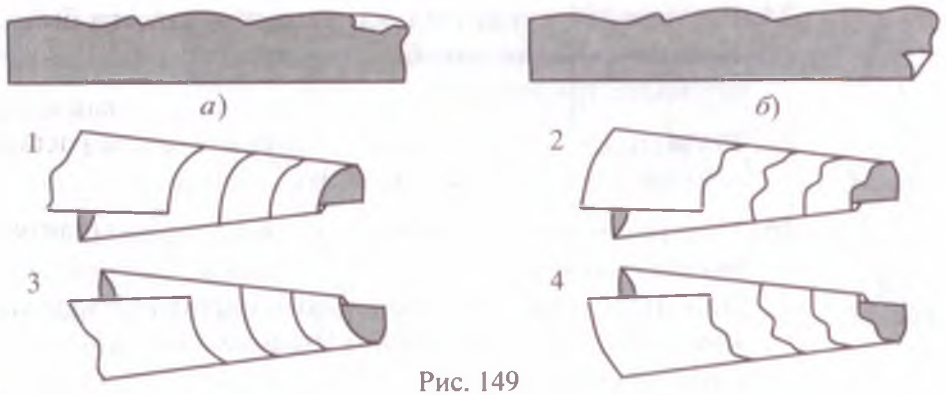


Рис. 149

Попробуйте, не пользуясь бумагой, ответить на вопрос: к какому из указанных на рисунке 149 результатов приведет способ *а*? способ *б*?

20. Возьмите набор геометрических тел (куб, шар, пирамида, конус, цилиндр и др.). Эти предметы расположены на столе так, чтобы, глядя на них из некоторой точки, можно было догадаться, как выглядит эта группа предметов с противоположной стороны (т. е. не должно быть предметов, полностью скрытых от наблюдателя). Учащиеся становятся попарно лицом друг к другу, и один из них вслух описывает, как видит эту композицию его товарищ с противоположной стороны. Третий ученик, видя предметы, контролирует и оценивает ответ. Затем отвечает второй ученик. Выигрывает тот, кто подробнее и без ошибок смог описать расположение предметов. Устное описание можно заменить рисованием.

21. Уберите на рисунке 106 несколько точек так, чтобы из оставшихся никакие четыре не являлись вершинами квадрата. Постарайтесь достичь этого, убрав как можно меньше точек.

22. Уберите несколько точек на рисунке 107 так, чтобы из оставшихся никакие три не являлись вершинами равностороннего треугольника. Постарайтесь достичь этого, убрав как можно меньше точек.

Рис. 150

23. Концы веревки завязаны в виде петель (рис. 150). Эти петли одеваются на левую и правую руку. Как завязать на веревке узел, не снимая петель с рук?

Рис. 151

24. Рисунок 151 служит иллюстрацией к известной басне Крылова. Какая это басня и какая строка ее здесь проиллюстрирована?

25. Рисунок 152 служит иллюстрацией к сказке Милна «Винни-Пух и все, все, все». Что здесь изображено?

26. Ученики одной из московских школ совершили автобусную экскурсию в г. Волоколамск. Вернувшись с экскурсии, один из школьников нарисовал картинку (рис. 153). Куда на этой картинке едет автобус — в Москву или Волоколамск?

Рис. 152

27. На рисунке 154 изображены некоторые геометрические тела. Возможно, точка зрения не очень привычна. Какие тела, если на них посмотреть с соответствующей стороны, могут выглядеть, как на рисунке? Какие из рисунков могут соответствовать одному и тому же телу?

Рис. 153

28. На квадратном участке расположены три дома (рис. 155), а в ограде сделаны три калитки. От каждой калитки проложена дорожка к домику с тем же номером, причем эти дорожки не пересекаются. Как проходят дорожки?

29. ИГРА СО СПИЧКАМИ. На стол, вокруг которого сидят участники, кладут по одной коробке спичек на каждого участника.

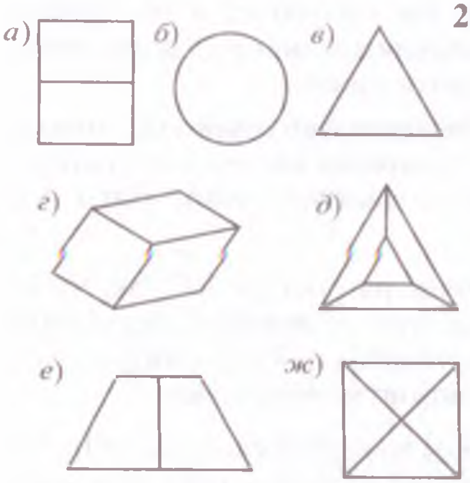


Рис. 154

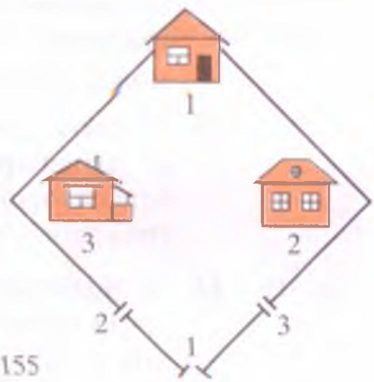


Рис. 155

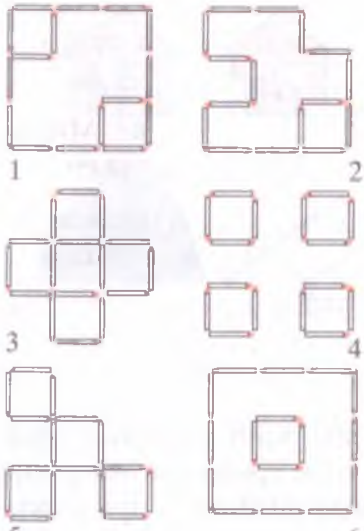


Рис. 156

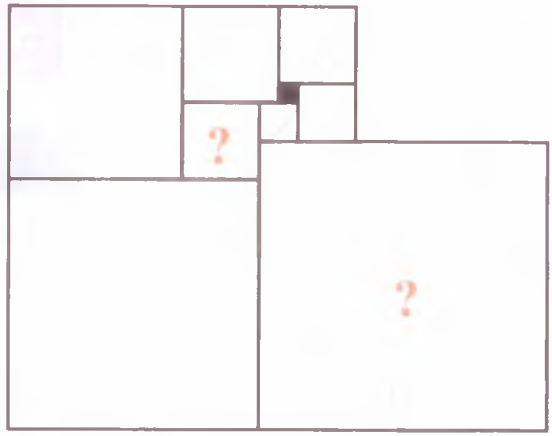


Рис. 157

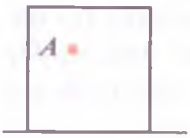


Рис. 158

На середину стола кладутся последовательно фигуры (рис. 156). Каждый из играющих складывает первую из нарисованных фигур, затем берет в руку еще одну спичку и по команде ведущего передвигает ею спички, образующие первую фигуру так, чтобы получилась вторая фигура, затем третья...

Выигрывает тот, кто перемещение спичек закончит быстрее, получив при этом последнюю фигуру.

30. На рисунке 157 изображены девять квадратов. Найдите сторону двух квадратов, отмеченных знаком вопроса, если сторона маленького черного квадрата равна 1.

Рис. 159

31. На горизонтальной прямой расположен квадрат, в котором отмечена точка *A* (рис. 158). Представьте себе, что квадрат начинает перекатываться вдоль прямой. Изобразите траекторию, описываемую точкой *A*. (Предварительно перерисуйте в тетрадь рисунок 158.)

32. Можно ли «переплести» карандаши так, как показано на рисунке 159?

Рис. 160

Рис. 161

33. Рисунок 160 иллюстрирует еще одно наглядное доказательство того, что сумма углов треугольника равна 180°. Внимательно рассмотрите рисунок и предложите по нему свое объяснение этого важнейшего свойства треугольников.

34. На рисунке 161 изображены три домика, погреб, колодец и навес. Проведите от каждого домика по одной тропинке к погребу, колодцу и навесу так, чтобы ни одна из этих девяти тропинок не пересекалась с другой (или докажите, что это невозможно).

35. Одиннадцать кружочков расположены на плоскости так, как показано на рисунке 162. Можно ли раскрасить их тремя различными красками так, чтобы никакие два соседних (касающихся друг друга) кружочка не были одного цвета? Ответ обоснуйте.

36. Посетив Исторический музей, Витя решил нарисовать саблю и ножны. Вот что у него получилось (рис. 163). Все ли верно в его рисунке, нет ли ошибки?

Рис. 162

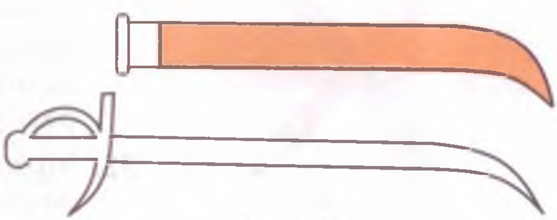


Рис. 163

19 Фигурки из кубиков и их частей

Изображение пространственного тела на плоскости — дело непростое. Ведь надо нарисовать его, чтобы ясно было, как оно выглядит со всех сторон. Для облегчения этой задачи изобрели МЕТОД ТРЕХ ПРОЕКЦИЙ. Этим методом пользуются чертежники, инженеры, рабочие для изображения и изготовления различных деталей.

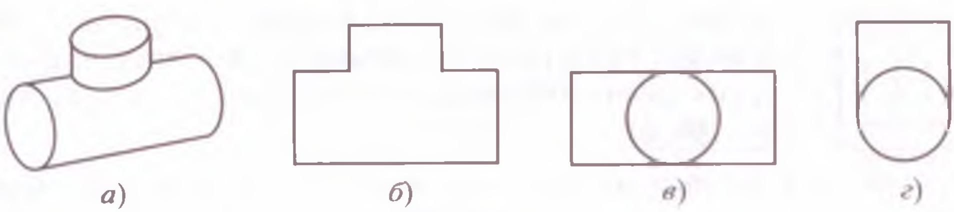
В чем состоит метод трех проекций? Мы смотрим на тело с трех сторон: спереди, сверху и слева. Затем делаем три чертежа, изображающих увиденное.

Пусть, например, из куска дерева вырезана замысловатая деталь (рис. 164, *а*). Чтобы токарь выточил ее, мы дадим ему не сам рисунок, а именно три проекции этой детали: вид спереди (рис. 164, *б*), сверху (рис. 164, *в*) и слева (рис. 164, *г*). Рабочий внимательно рассмотрит эти проекции и поймет, какой должна быть деталь.

Надо обладать хорошим пространственным воображением, чтобы суметь представить себе тело по его трем проекциям.

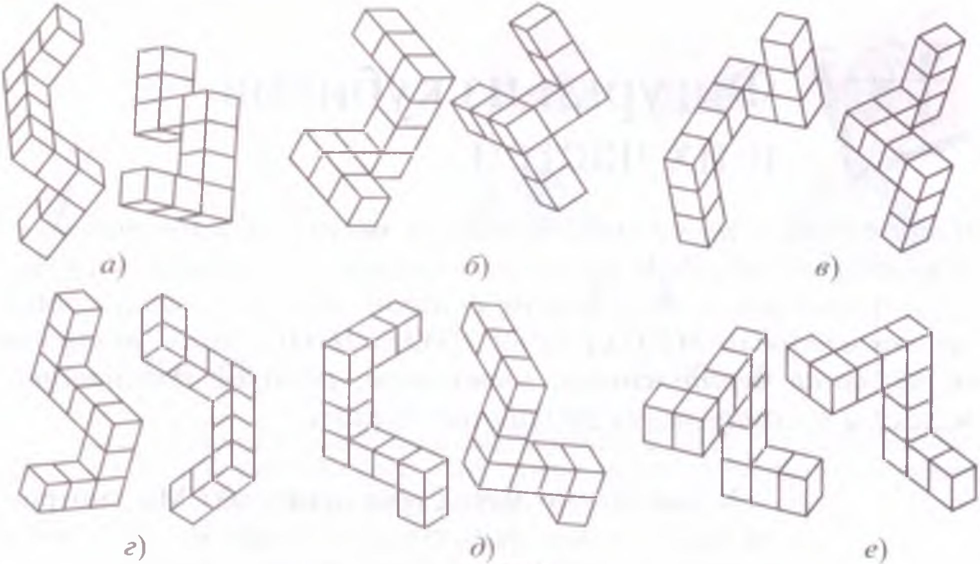
Выполните несколько заданий, способствующих развитию пространственного мышления.

1. Определите, один и тот же объект изображен на рисунке 165, *а—ж* или нет? Постарайтесь объяснить, что значит ОДИНАКОВЫЕ (равные) объекты, а что значит РАЗНЫЕ. Что общего у всех фигур, изображенных на рисунке 165?



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 164



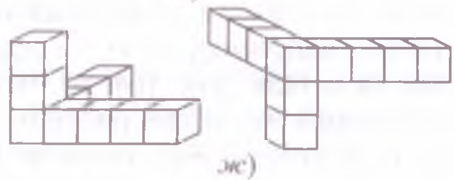


Рис. 165

а) общий вид

б) вид спереди

в) вид сверху

г) вид слева

Рис. 166

2. По поверхности стеклянного куба проходит ломаная линия, сделанная из толстой проволоки (рис. 166, *а*). Глядя на куб спереди, сверху и слева, мы видим, как располагается эта проволока, и можем изобразить три ее проекции. Вид спереди похож на букву Г, вид сверху — на Ч без половины вертикальной палочки, а вид слева — на стилизованную латинскую S (рис. 166, *б*, *в*, *г*). Рассмотрите ломаные и кривые линии на рисунке 167 и начертите в каждом случае три проекции (вид спереди, сверху и слева).

3. Обратное задание: даны проекции ломаных спереди, сверху и слева (рис. 168). Тонким карандашом нарисуйте куб, а на его поверхности проволоку, из которой сделаны эти ломаные (общий вид — как на рисунке 166, *а*).

4. На рисунке 169 (1—8; А—З) показаны восемь кубов, разрезанных на две части. Первые части этих кубов

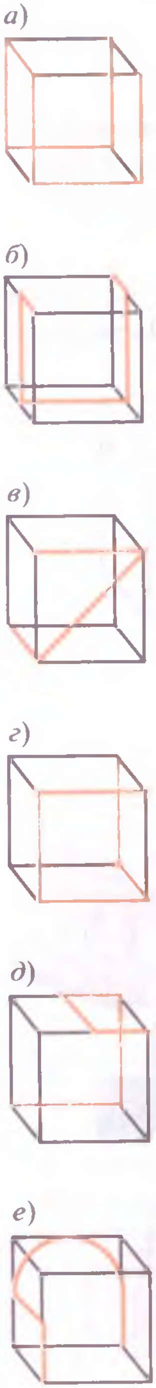


Рис. 167

Рис. 168

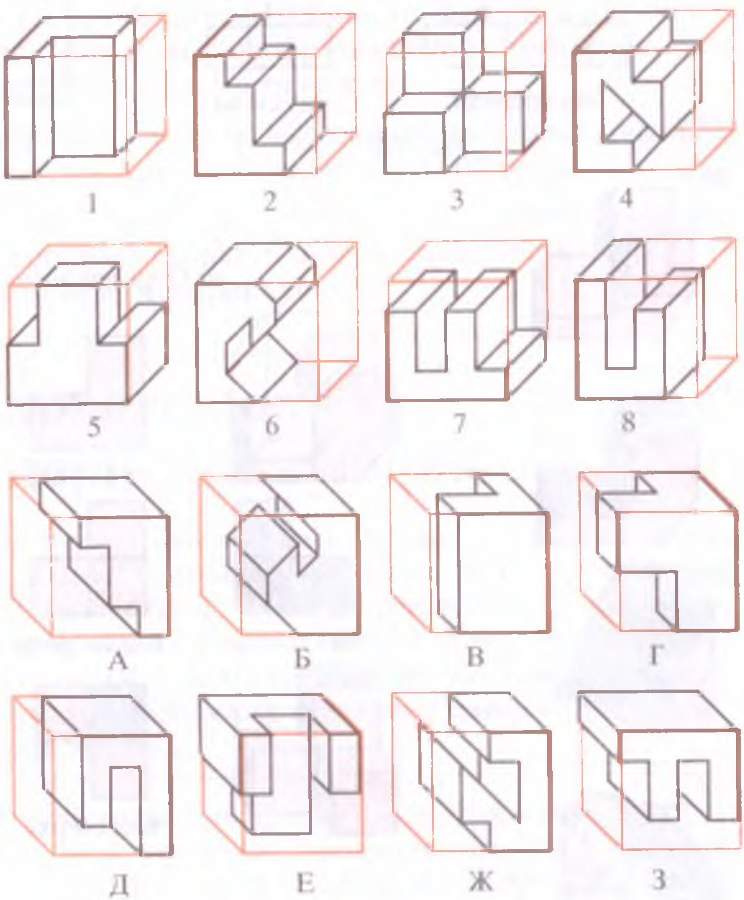
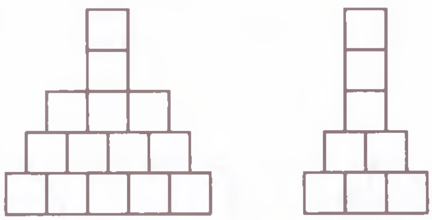


Рис. 169

представлены на позициях 1—8, вторые — на позициях А—З. Для каждой из частей 1—8 найдите ее пару среди А—З.

5. Мальчик построил из кубиков здание. На рисунке 170 показано, как это здание выглядит спереди и слева. Какое наименьшее и наибольшее число кубиков потребуется для постройки?

6. Известно, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести одну плоскость. На рисунке



вид спереди вид слева

Рис. 170

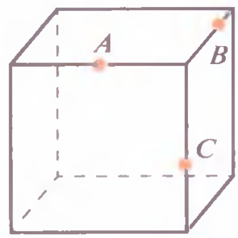


Рис. 171

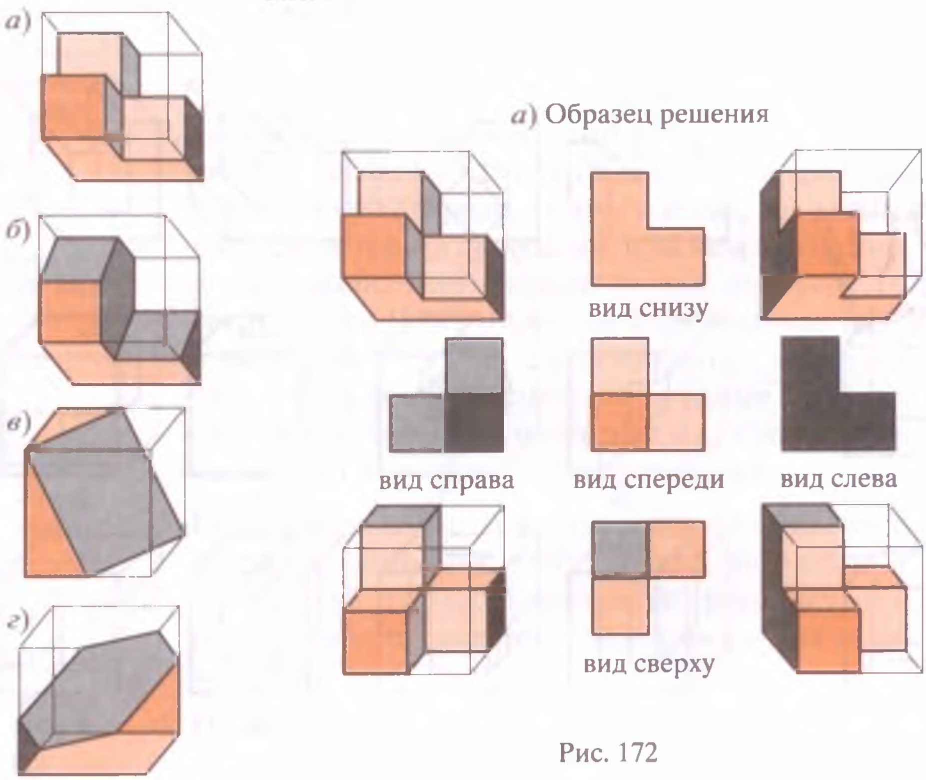


Рис. 172

171 дано изображение куба, на поверхности которого указаны три точки. Постройте фигуру (сечение), по которой плоскость, проходящая через указанные точки, пересечет куб.

Задача 6 похожа на разрезание хлеба: ножом мы тоже проводим некоторые плоскости и получаем в разрезе фигуры сечения.

7. Как провести плоскость, чтобы получить квадратное сечение куба?

8. Какой формы получится сечение куба, если плоскость провести по диагонали, т. е. через четыре противоположные вершины? Объясните ответ.

9. Какие многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью? Если ответить на этот вопрос трудно, проведите эксперимент: вылепите из пластилина кубик и, выбирая различные направления, разрежьте его на две части ножом.

10. Изобразите три тела, вырезанных из кубика (рис. 172, *б*, *в*, *г*), девятью способами, как на образце.

11. Сколько различных тел можно построить, соединяя два соседних кубика только по граням: а) из трех кубиков? б) из четырех кубиков?

20 Параллельность и перпендикулярность

Параллельные и перпендикулярные прямые играют очень большую роль в жизни человека: особенности их взаимного расположения используют в строительстве, технике, искусстве. Теория параллельных занимает одно из центральных мест в науке «геометрия». Именно свойства параллельных прямых определяют основные свойства изучаемого нами пространства.

Рассматривая основные геометрические фигуры, среди всех углов мы выделили прямой угол, равный 90°. Сейчас мы опять вернемся к нему. Изобразим прямой угол и продолжим его стороны за вершину

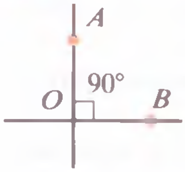


Рис. 173

(рис. 173). Мы получили две прямые, пересекающиеся под прямым углом.

Две прямые, пересекающиеся под прямым углом (90°), называются ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ.

Перпендикулярные прямые обладают интересными свойствами.

1. Через точку вне данной прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную этой прямой и пересекающую ее.

2. Если точку взять на самой прямой, то через эту точку проходит бесконечное число прямых, перпендикулярных данной прямой.

Рис. 174

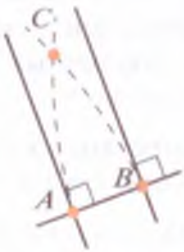


Рис. 175

Если начертить прямую в тетради, то одна из прямых, перпендикулярных ей, будет лежать в плоскости тетради, а все остальные прокалывать тетрадь в данной точке. Они будут находиться в пространстве (вне плоскости листа); это похоже на дорожный столб, стоящий на перекрестке дорог: столб перпендикулярен каждой дороге (рис. 174).

3. Две прямые на плоскости, перпендикулярные третьей прямой, не могут пересечься одна с другой (рис. 175).

Если бы они пересеклись, например, в точке C, то мы получили бы треугольник ABC, у которого два прямых угла, что невозможно (см. раздел 7). На плоскости такого не может быть. А вот на сфере перпендикуляры ведут себя иначе.

Вспомните экватор и меридианы. Они перпендикулярны друг к другу, но все меридианы пересекаются в одной точке — на ПОЛЮСЕ.

Но вернемся к плоскости. Итак, свойство 3 говорит о том, что на плоскости существуют непересекающиеся прямые.

Две прямые на плоскости называются ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ, если они не пересекаются.

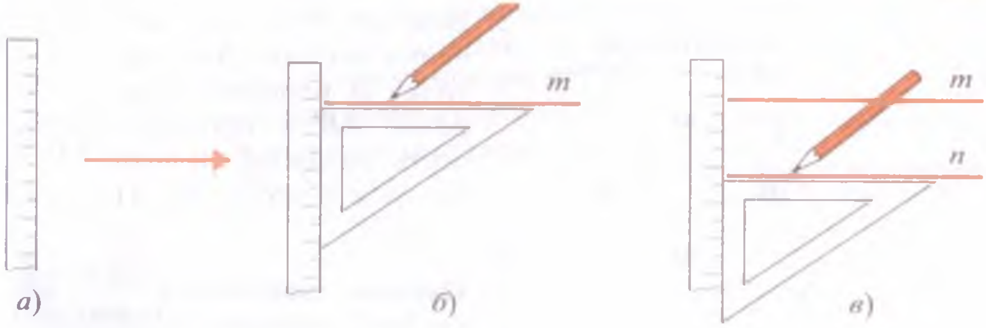


Рис. 176

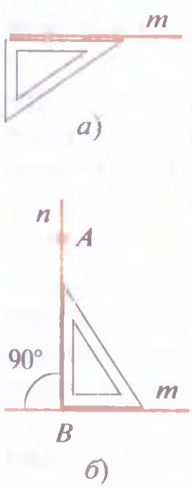


Рис. 177

Используя линейку и чертежный угольник, можно без труда вычерчивать параллельные прямые (рис. 176). Передвигая, как показано на рисунке, треугольник вдоль неподвижной линейки, получаем множество параллельных между собой прямых. На рисунке 176, *в* прямые m и n параллельны. Этот факт записывается так: $m \parallel n$. (Читаем: m параллельна n.) Выбор именно такого знака достаточно понятен, не так ли?

У обычного чертежного угольника один угол прямой. В этом случае с его помощью можно проводить прямые, перпендикулярные данной прямой (рис. 177). Или, как говорят, опускать на данную прямую перпендикуляры или восставлять к ней перпендикуляры. То, что прямые m и n перпендикулярны, записывается так: $m \perp n$.

С помощью циркуля и линейки также можно строить параллельные и перпендикулярные прямые. Предлагаемые ниже способы построения интересны и тем, что число проводимых при построении линий будет наименьшим из возможных.

Проведение параллельных прямых

Пусть проведена прямая l и дана точка A вне этой прямой (рис. 178, *а*).

1. Проведем через точку A любую окружность, пересекающую прямую l (рис. 178, *б*).

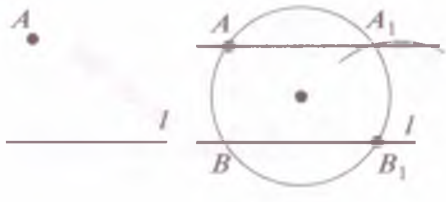


Рис. 178

2. Возьмем одну из точек пересечения окружности с прямой — точку B, измерим циркулем отрезок AB и проведем окружность радиусом, равным AB, с центром в точке B_1. Появится точка A_1.
3. Прямая, проходящая через точки A и A_1, параллельна прямой l.

Проведение перпендикуляра к прямой

Пусть проведена прямая l и дана точка A вне этой прямой.

Для построения перпендикуляра достаточно с помощью циркуля провести через A две произвольные окружности с центрами на прямой l (рис. 179). Вторая точка пересечения этих окружностей (точка A_1) и даст нам вторую точку на перпендикуляре.

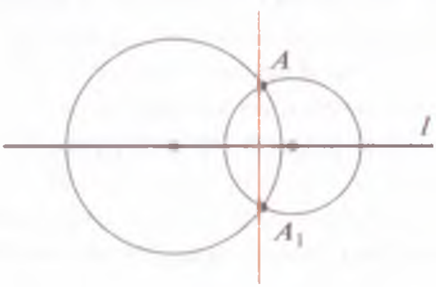


Рис. 179

Подумайте, как провести перпендикуляр (с помощью циркуля и линейки), если точка A лежит на прямой l.

Следует запомнить еще одно важное свойство перпендикуляра.

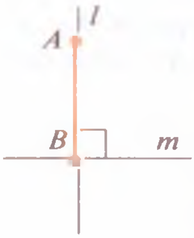


Рис. 180

Если A — точка на прямой l, а B — точка пересечения перпендикулярных прямых l и m* (рис. 180), *то отрезок AB есть кратчайшее расстояние от точки A до прямой m.

Итак, если мы хотим из точки A по кратчайшему пути попасть на прямую m, то двигаться надо по перпендикуляру к прямой m.

Мы все время говорили: «параллельные прямые», «перпендикулярные прямые». Понятно, что на практике мы имеем дело не с прямыми, а лишь с их частями — отрезками, лежащими на этих прямых. Отрезки, лежащие на параллельных прямых, также называются ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ, а на перпендикулярных — ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ.

Среди ребер куба можно указать пары параллельных и перпендикулярных ребер.

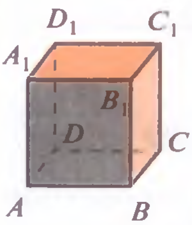


Рис. 181

На рисунке 181 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Три четверки его ребер параллельны между собой. Вот одна из них: $AB \parallel DC \parallel A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Назовите еще две четверки параллельных между собой ребер куба.

Ребро AA_1 перпендикулярно ребрам AB, A_1B_1, AD и A_1D_1. Угол между ребром AA_1 и каждым из этих ребер равен 90°. Назовите ребра, перпендикулярные: а) ребру CC_1; б) ребру DC.

Ребра AA_1 и BB_1 куба лежат в одной плоскости — в плоскости передней грани; в этой же плоскости лежат и ребра A_1B_1 и AB.

Через ребра AA_1 и CC_1 также можно провести плоскость — AA_1C_1C (диагональное сечение куба). А вот пара ребер AA_1 и D_1C_1 особенная. Не существует плоскости, которая бы проходила через оба эти отрезка (а также через прямые AA_1 и D_1C_1).

Такие отрезки и прямые называются СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ.

Какую бы плоскость мы ни провели через AA_1, обязательно прямая D_1C_1 либо пересечет ее в какой-либо одной точке, либо не пересечет никогда.

Найдите еще несколько пар скрещивающихся ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1. Засеките время и постарайтесь за 10 мин привести как можно больше примеров параллельных и перпендикулярных прямых, встречающихся в окружающем нас мире. (Можно провести конкурс в классе или дома. Участники поочередно называют примеры таких прямых. Игра заканчивается, как только в течение минуты никто не может придумать новый пример. Побеждает тот, чей пример был последним.)

2. Найдите на рисунке 181 какие-либо отрезки с концами в вершинах куба (не являющиеся его ребрами), такие, чтобы они были: а) параллельными; б) перпендикулярными; в) скрещивающимися.

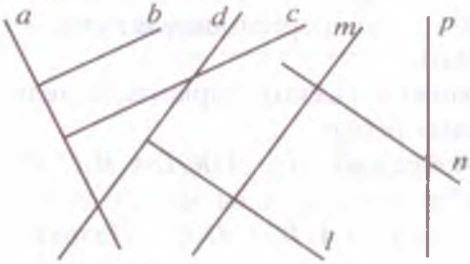


Рис. 182

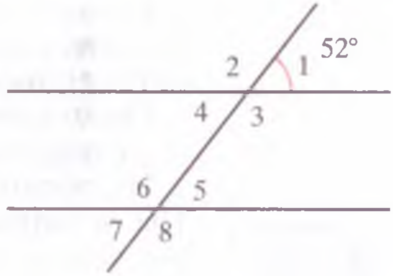


Рис. 183

3. Пользуясь линейкой, транспортиром и чертежным угольником, найдите на рисунке 182 пары параллельных и перпендикулярных прямых.

4. На рисунке 183 изображены две параллельные прямые, пересекаемые третьей прямой. Известно, что угол *1* равен 52°. Чему равны остальные углы?

21 Параллелограммы

Параллелограмм — это красивое и звучное слово, напоминающее нам о единицах веса, на самом деле никакого отношения к ним не имеет. Проведем две пары параллельных прямых, как на рисунке 184. ***Рассмотрим образовавшийся при этом четырехугольник ABCD. Его стороны попарно параллельны: AB ∥ CD, BC ∥ AD. Такой четырехугольник называется ПАРАЛЛЕЛОГРАММОМ.***

На рисунке 185 изображены разные параллелограммы. Да, да, не удивляйтесь, и ромб, и прямоугольник, и квадрат — тоже параллелограммы. Только это параллелограммы с некоторыми дополнительными свойствами.

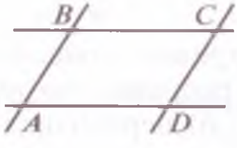


Рис. 184

Рис. 185

Рис. 186

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

А действительно ли прямоугольник является параллелограммом? Верно ли, что $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ (рис. 186)?

Вспомним свойство трех перпендикулярных прямых (с. 92). Оно говорит о том, что два перпендикуляра к одной прямой, расположенные в одной плоскости, параллельны между собой. В прямоугольнике $ABCD$ $AB \perp AD$ и $CD \perp AD$. Значит, $AB \parallel CD$.

Но углы A и B тоже прямые, т. е. $BC \perp AB$ и $AD \perp AB$. Значит, и $BC \parallel AD$. Получилось, что у прямоугольника стороны попарно параллельны. Следовательно, прямоугольник является параллелограммом.

Квадрат — очень интересный четырехугольник. Ему можно дать несколько определений.

1. У квадрата, как и у ромба, все стороны равны. Только еще все углы прямые. Значит, квадрат — это ромб с прямыми углами.

2. У квадрата, как и у прямоугольника, все углы прямые. Только еще все стороны равны. Значит, квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

3. У квадрата, как и у параллелограмма, стороны попарно параллельны. Только еще все они равны и все углы прямые. Значит, квадрат — это параллелограмм с прямыми углами, все стороны которого равны.

У квадрата есть еще целый ряд интересных свойств. Так, например, если необходимо забором данной длины огородить четырехугольный участок наибольшей площади, то следует выбрать этот участок в виде квадрата.

Лучше изучить параллельные и перпендикулярные прямые и параллелограммы нам помогут опыты с листом бумаги.

Опыты с листом бумаги

Отметьте на листе две точки A и B, а затем сложите лист так, чтобы A и B совпали. Как расположены друг относительно друга линия сгиба и прямая AB?

Перегибанием листа бумаги получите пару параллельных и пару перпендикулярных прямых.

Из листа бумаги произвольной формы сложите и затем вырежьте прямоугольник. Покажите в нем параллельные и перпендикулярные стороны.

Сверните прямоугольник так, чтобы получился квадрат. Вырежьте этот квадрат и исследуйте его. Линия сгиба, проходящая через две противоположные вершины квадрата, называется ДИАГОНАЛЬЮ КВАДРАТА. Получите перегибанием две диагонали. Какие свойства вы можете отметить, используя только перегибы и наложения бумаги? Запишите эти свойства.

Если их отыскание вызовет затруднение, помочь может следующий план исследования:

1. Сравните диагонали по длине.
2. Как диагонали расположены одна относительно другой?
3. В каком отношении диагонали делятся точкой пересечения?
4. На какие фигуры делит квадрат каждая диагональ?
5. Какого вида эти фигуры?
6. Сравните их между собой.

Перегните квадрат пополам так, чтобы совпали две противоположные стороны. Через какую точку проходит линия сгиба? Как линия сгиба расположена относительно сторон квадрата? На какие фигуры она делит квадрат?

Учитель дал ребятам задание вырезать из цветной бумаги квадрат. Вася, вырезая квадрат, проверил его так: он сравнил длины сторон. Все четыре стороны оказались равными, и Вася решил, что справился с заданием. Надежна ли такая проверка?

Алеша проверил работу иначе: он измерил не стороны, а диагонали. Диагонали были равны, и Алеша посчитал квадрат вырезанным правильно. Верно ли это?

Лена, вырезав квадрат, сравнила все четыре отрезка, на которые диагонали разделили одна другую. Они оказались равными. По мнению Лены, это доказывало, что вырезанный четырехугольник — квадрат. А по-вашему?

Как удостовериться, что вырезанная фигура — квадрат?

Вырежьте из бумаги прямоугольник со сторонами 10 см ***и*** 16 см. ***Отрежьте от него квадрат со стороной*** 10 см. ***Останется прямоугольник, стороны которого*** 6 см ***и*** 10 см, ***т. е. одна больше другой тоже примерно в*** 1,6 ***раза. Затем от этого прямоугольника отрежьте квадрат со стороной 6*** см. ***Останется прямоугольник, одна сторона которого тоже примерно в*** 1,6 ***раза больше другой.***

Этот процесс можно продолжать и дальше. На прямоугольники, в которых стороны соотносятся приблизительно как 1,6 : 1, обратили внимание очень давно. Посмотрите на изображение храма Парфенон в Афинах (рис. 187). Даже сейчас это одно из самых

Рис. 187

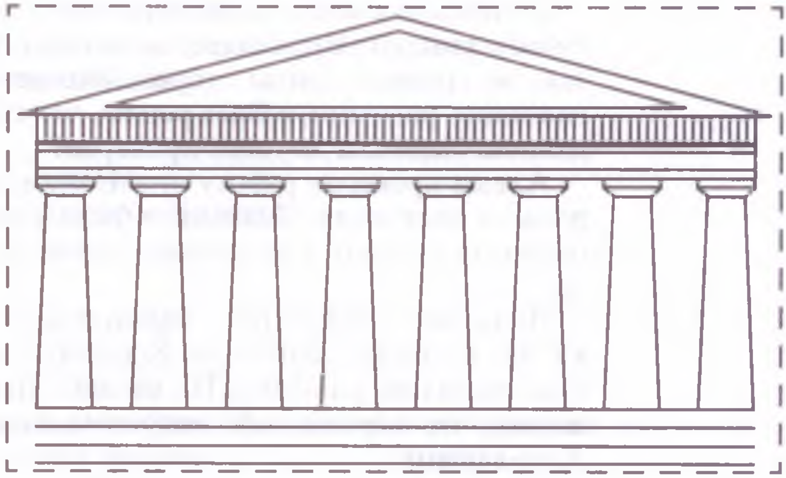


Рис. 188

красивых сооружений мира. Этот храм построен в эпоху расцвета древнегреческой математики. И его красота основана на строгих математических законах. Если мы опишем около фасада Парфенона прямоугольник (рис. 188), то окажется, что длина его больше ширины примерно в 1,6 раза. Такой прямоугольник назвали ЗОЛОТЫМ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ. Говорят, что его стороны образуют ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ. Математики дают точное определение золотому сечению.

Золотое сечение — это такое деление целого на две неравные части, при котором большая часть относится к целому, как меньшая к большей. Число 1,6 лишь приближенно (с точностью до 0,1) представляет величину золотого сечения.

Рис. 189

Если отрезок разделен на две части так, что меньшая имеет длину x, а большая — длину y (рис. 189), то в случае золотого сечения $\frac{y}{x+y} = \frac{x}{y}$. Интересно, что

Рис. 190 $AC : (AC + CB) = CB : AC$

В правильной пятиконечной звезде каждая из пяти линий, составляющих эту фигуру, делит другую в отношении золотого сечения (рис. 190).

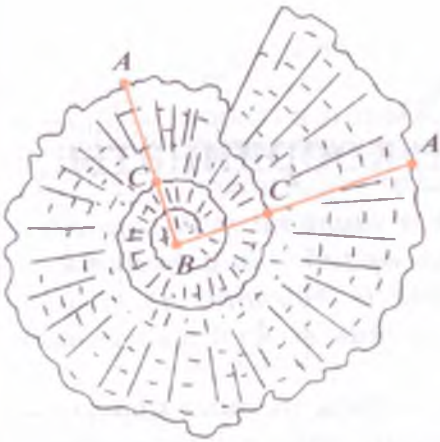
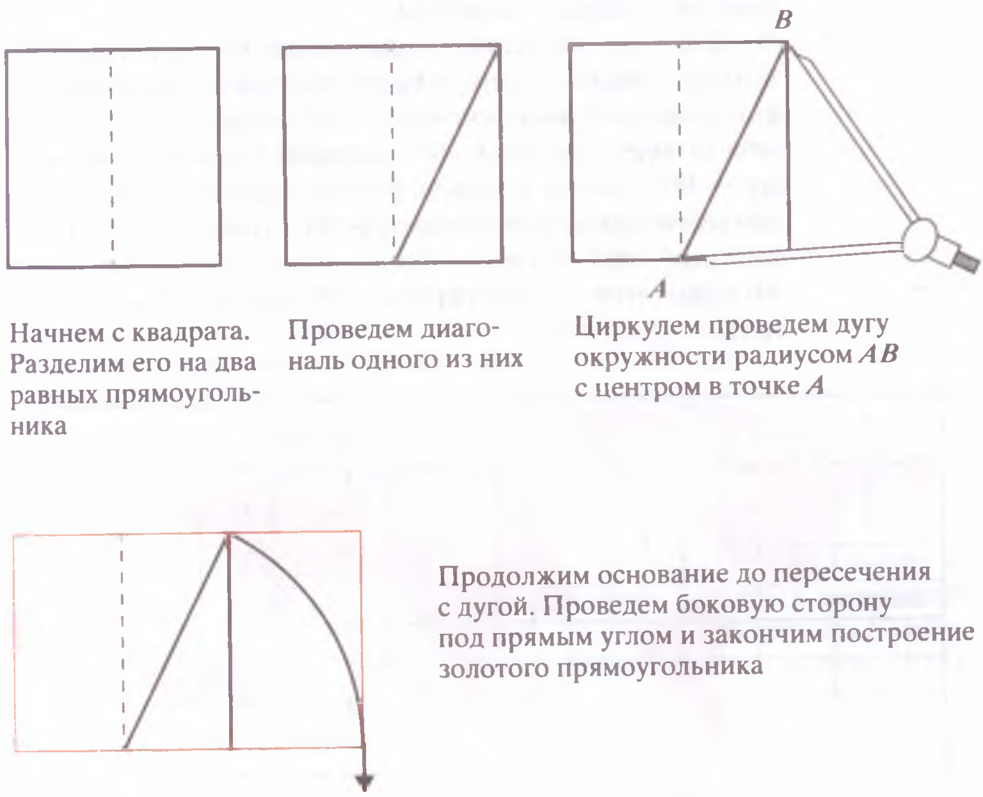


Рис. 191

На рисунке 191 изображена раковина: точка C делит отрезок AB приблизительно в золотом отношении.

Видели ли вы когда-нибудь предметы, имеющие форму золотого прямоугольника?

***Постройте золотой прямоугольник с помощью циркуля и линейки по указаниям, данным на рисунке** 192.*



Начнем с квадрата. Разделим его на два равных прямоугольника

Проведем диагональ одного из них

Циркулем проведем дугу окружности радиусом AB с центром в точке A

Продолжим основание до пересечения с дугой. Проведем боковую сторону под прямым углом и закончим построение золотого прямоугольника

Рис. 192

22 Координаты, координаты, координаты...

«...Но интересно, на какой же я широте и долготе?» — продолжала Алиса. Сказать по правде, она понятия не имела о том, что такое широта и долгота, но ей очень нравились эти слова. Они звучали так важно и красиво!»

Географическая карта (будь то карта мира, одной страны или города) покрыта сетью тонких линий. Это параллели и меридианы (рис. 193). Горизонтальные линии — это ПАРАЛЛЕЛИ. Они показывают географическую ШИРОТУ в градусах (удаление (в градусах) данной точки от экватора).

Экватору на карте мира соответствует горизонтальная линия, делящая карту пополам. Все точки экватора имеют нулевую широту. Северному полюсу соответствует значение 90° северной широты, а Южному — 90° южной широты. Москва находится севернее экватора примерно на широте 56° (говорят: 56° северной широты). Но для определения местонахождения Москвы этого недостаточно. Нужна вторая координата — ДОЛГОТА.

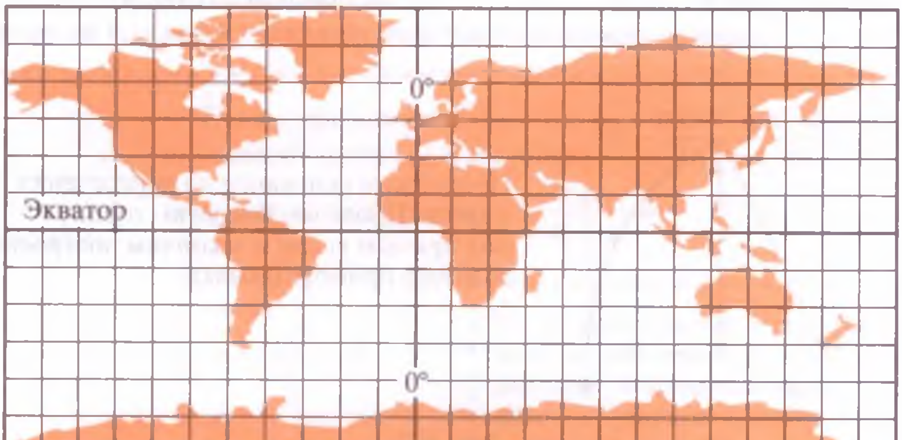


Рис. 193

Вертикальные линии на карте — это МЕРИДИАНЫ. Среди них выбран начальный, нулевой, меридиан. Этот меридиан проходит через Гринвичскую обсерваторию в Англии, и поэтому его называют ГРИНВИЧСКИМ МЕРИДИАНОМ. Ему соответствует нулевая долгота. Все точки справа (восточнее) от него имеют восточную долготу. Она изменяется от 0° до 180°.

В частности, Москве соответствует точка, равная 38° восточной долготы. Понятно, что точкам слева от начального меридиана соответствуют значения западной долготы.

→ ***Меридианы и параллели образуют на поверхности земного шара координатную сетку. Указывая широту и долготу точки, мы указываем ее координаты, т. е. положение точки на карте.***

Выберем, например, две пары точек на карте, расстояния между которыми р а в н ы, но точки расположены в разных местах карты (близко к экватору и далеко от него). Этим парам точек будут соответствовать пары точек на поверхности земного шара, находящиеся на р а з н о м расстоянии одна от другой. Часть суши в нижней части карты, соответствующая Антарктиде, несоизмеримо велика. Создается впечатление, что Антарктида больше Европы, Азии и Африки, вместе взятых. Это, конечно, не так. Причины этого вы, возможно, уже поняли. Все дело в том, что земля круглая и изобразить ее поверхность на плоскости без искажений просто невозможно. (Хотя для карт города или района эти искажения незначительны и ими можно пренебречь.)

На поверхности земного шара (или на его модели — глобусе) параллелям соответствуют окружности, параллельные экватору, радиусы которых уменьшаются по мере удаления от экватора, стягиваясь к нулю у полюсов, в то время как меридианам соответствуют одинаковые полуокружности, проходящие через полюсы. Изменению широты на 1° на всех меридианах соответствует один и тот же путь (одна и та же дуга). Изменению долготы на 1° на разных параллелях соответствуют разные пути. Большой — у экватора, маленький — у полюсов.

Что касается координат на плоскости, то, наверное, все ребята так или иначе с ними знакомы. Кто умеет играть в шахматы, знает, что вертикальные полосы обозначаются буквами, а горизонтальные — цифрами. В результате каждая клетка шахматной доски имеет собственное «имя», складывающееся из двух координат — буквы и числа, обозначающих столбец и строку, на пересечении которых эта клетка находится.

Игра «Морской бой»

Каждый игравший в «Морской бой» знает, что клетки доски в этой игре обозначаются парой — буква и число. Поиграем в эту игру и мы, но обозначать клетки будем парой чисел. При этом первое число — номер столбца, а второе — номер строки. Так, клетка, отмеченная на рисунке 194, обозначается парой (5; 3). Напомним ПРАВИЛА ИГРЫ (но можно вносить изменения).

1. Каждый из двух играющих размещает на доске свои корабли: один линкор (полоска из четырех клеток), два авианосца (полоска из трех клеток), три крейсера (две клетки рядом) и четыре катера (одна клетка). При этом корабли не должны соприкасаться даже углами.

2. Каждый по очереди производит по серии выстрелов до первого промаха. После каждого выстрела соперник сообщает одно из трех: ранил (значит, выстрел попал в корабль, но часть клеток корабля еще цела), убил (поражена последняя клетка раненого корабля), промах.

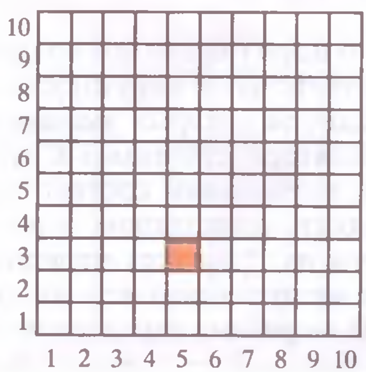


Рис. 194

Выигрывает тот, кто первым поразит все корабли вражеской флотилии. Возможны и варианты правил. Так, иногда добавляют несколько мин в виде единичных клеток (например, 5 мин). Попадание в мину наказывается пропуском очередного хода.

Раз уж речь зашла об игре «Морской бой», то попробуйте решить несколько задач, связанных с этой игрой.

1. Представьте, что игра в «Морской бой» пришла к позиции, изображенной на рисунке 195. На этой позиции показан результат ваших предыдущих действий: отмечены «убитые» корабли соперника, а также все сделанные вами выстрелы. Сейчас ваш ход. Допустим, сопернику достаточно сделать один очевидный выстрел и уничтожить вашу флотилию. Так что промахиваться нельзя. Сможете ли вы произвести серию точных выстрелов и выиграть в этой игре?

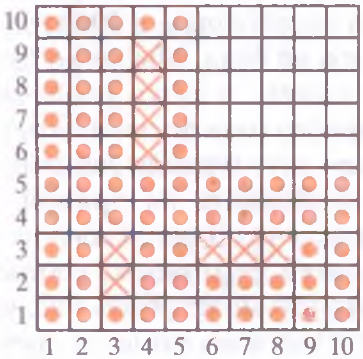


Рис. 195

2. Можно ли на пустой доске для «Морского боя» разместить 25 катеров? 26 катеров? Почему?

При решении следующих двух задач вам поможет раскраска доски для «Морского боя» в четыре цвета так, что нижняя левая клетка окрашивается в первый цвет, затем маленькая диагональ из двух клеток окрашивается во второй цвет, следующая трехклеточная диагональ — в третий цвет, затем цвет четвертый, потом вновь первый и т. д. Сколько получилось клеток каждого цвета?

3. На доске находится один линкор. Какое наименьшее число выстрелов надо сделать, чтобы хотя бы один раз наверняка попасть в него?

4. Можно ли разрезать всю доску на линкоры?

Но мы немного отвлеклись и забыли про координаты. Вернемся к ним, а для этого, как ни странно, попробуйте вспомнить и написать день рождения своей мамы. Что означает это число?

На самом деле это тоже координата. Координата времени. За точку отсчета берется начало нашей эры, которая началась с года под номером 1. (Известно ли вам, что нулевого года не было?) Правда, нет четкой единицы измерения, так как год не имеет постоянного числа суток. В обычном году 365 дней, в високосном — 366 дней. (Високосные годы имеют номера, делящиеся на 4. Например, 1992 год — високосный. Исключение составляют годы, кратные 100. Если номер года делится на 100, но не делится на 400, то год не является високосным. Если же делится на 400, то год високосный. Так, 1900 год не был високосным, а 2000 год был високосным годом.) Но это не беда. Мы легко любую дату можем перевести, скажем, в сутки (подсчитать число суток от начала первого года до этой даты) или даже в часы, если мы знаем дату и время события. Течение времени удобно отображать на прямой. Для этого на ней надо выбрать точку 0, направление возрастания времени и масштаб — отрезок, соответствующий единице времени; это может быть час, неделя, 1000 дней и т. д. Теперь каждому моменту времени соответствует точка на этой прямой.

Рис. 196

Прямая, на которой заданы точка 0 и точка 1, называется КООРДИНАТНОЙ ОСЬЮ или просто ОСЬЮ (рис. 196).

Вы без труда можете найти вокруг себя различные примеры, иллюстрирующие прямые с заданными на них координатами. Это железные дороги (у нас в стране у большинства железных дорог точкой отсчета является Москва), улицы городов и т. д.

А теперь перейдем к плоскости. Координаты на плоскости можно задавать различными способами. Но у всех этих способов есть одно общее свойство:

Координаты точки плоскости — это пара чисел, из которых одно число является первым и указывается первым, а другое соответственно вторым.

Математики такую пару называют УПОРЯДОЧЕННОЙ. Наиболее распространенным способом задания координат на плоскости, после чего она становится КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ, является следующий.

На плоскости выбирают две перпендикулярные прямые — оси координат. Точка пересечения этих прямых является НАЧАЛОМ КООРДИНАТ. Единичные

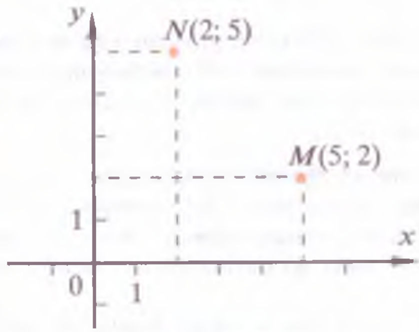


Рис. 197

отрезки на каждой оси выбираются равными по длине (рис. 197). Одну из этих осей, обычно горизонтальную, называют осью x, а вторую — осью y. Такую координатную систему называют ДЕКАРТОВОЙ (по имени великого французского математика Рене Декарта, работы которого положили начало одному из важнейших методов исследования — МЕТОДУ КООРДИНАТ).

Теперь каждая точка плоскости обозначается парой чисел. Точка M на рисунке 197 имеет координаты 5 и 2, что записывается так: M (5; 2). Ее нельзя путать с точкой N (2; 5).

Игра «Остров Сокровищ»

На острове Сокровищ была пещера, в которой капитан Флинт спрятал свои сокровища. Вход в пещеру был тщательно замаскирован, и найти его мог только старый пират Бен Ган. Перед смертью Бен Ган решил оставить для потомков шифрованное письмо — описание пути, ведущего к кладу, и места, где он спрятан.

Рис. 198

Поскольку старый пират получил в свое время неплохое образование, он решил для своих целей воспользоваться методом координат. Он взял карту острова, нарисовал на ней оси координат, выбрал единицу. В общем, сделал все как положено (рис. 198). В качестве главных ориентиров он указал координаты четырех дубов:

(3; 5), (–2; 7), (–3; 4), (3; –1).

Клад находился в точке пересечения прямых, соединяющих первый и третий, второй и четвертый дубы.

Начертите на клетчатой бумаге оси координат (за единицу можно выбрать расстояние в две клетки). Постройте точки, соответствующие местонахождению дубов, и определите координаты пещеры с сокровищами.

А теперь начните заполнять карту острова Сокровищ. Нанесите на карту различные объекты (колодец, наблюдательную вышку, склад, пальмовую рощу и т. д.), опишите их положение с помощью координат и сообщите эти координаты соседу по парте.
Пусть он восстановит вашу карту, а вы в свою очередь восстановите его карту. Сравните карты в классе. Чья получилась интереснее?

Для тренировки выполните следующие задания.

5. Даны координаты точек. Верно отметив на координатной плоскости и соединив последовательно эти точки, вы получите рисунок. Рисунок не получится, если вы ошибетесь.

1. Рисунок первый: (5; 1), (4; –2), (4; 0), (2; –1), (1,5; –0,5), (2; 1), (1; 0), (1; 1), (–3; 1), (1; 2), (1,5; 3), (5; 7), (5; 1), (1,5; 3), (2; 2). Последнюю точку не соединяйте ни с какой другой.

2. Рисунок второй: (0; 2), (0; 0), (1; 3), (2; 3), (3; 2), (3; 0), (1; –1), (2; –1), (1; –3), (0; –1), (–1; –3), (–2; –1), (–1; –1), (–3; 0), (–3; 2), (–2; 3), (–1; 3), (0; 0).

6. Как известно, сокровища Флинта были спрятаны на разных островах. При этом для шифровки места клада неоднократно использовался метод координат. На рисунке 199 изображена карта острова, на которой видны два ориентира (два больших камня). Современные искатели сокровищ не располагают подлинной картой, но они знают, что камни на этой карте имели координаты A (2; 1), B (8; 2), а координаты клада (6; 6). Найдите на карте место клада.

Рис. 199

Есть и другие способы задания координат на плоскости. Расскажем об одном, хотя и реже используемом, но достаточно полезном и практически, и теоретически. Речь пойдет о «полярных координатах».

На плоскости указывается точка 0, которая будет называться ПОЛЮСОМ, выходящий из этой точки луч — ПОЛЯРНАЯ ОСЬ, на котором отмечена точка, находящаяся на расстоянии 1 от 0.

Кроме того, задается направление вращения вокруг 0, например, против часовой стрелки (рис. 200). Таким образом,

Рис. 200

Каждая точка плоскости задается двумя полярными координатами: углом и расстоянием.

Расстояние показывает, как далеко точка находится от полюса, а угол показывает поворот полярной оси против часовой стрелки до положения, когда она пройдет через нужную точку. Полному повороту соответствует угол 360°, и полярный угол изменяется от 0 до 360°.

На рисунке 201 отмечены точки (0°; 3), (45°; 2), (90°; 1), (135°; 4).

7. Изобразите в полярных координатах точки (60°; 1,5), (150°; 3), (180°; 1), (270°; 5), (330°; 2).

Если вы ходили в поход, то знакомы с таким понятием, как АЗИМУТ. Оказывается, туристы обычно пользуются в походах полярными координатами, а азимут — это угол между направлением на север и направлением на некоторый предмет из точки, где находится турист (рис. 202).

8. Изобразите в полярных координатах точки:

а) A (10°; 2), B (130°; 2), C (250°; 2); б) K (20°; 3), L(110°; 3), M (200°; 3), N (290°; 3). Определите вид треугольника ABC и четырехугольника $KLMN$.

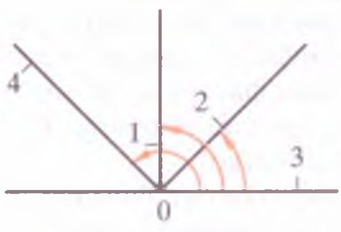


Рис. 201

Рис. 202

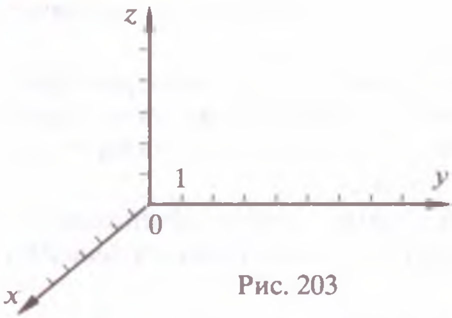


Рис. 203

Заканчивая наш разговор о координатах, «выйдем в пространство». Чтобы получить декартову систему координат в пространстве, надо к двум осям x и y добавить еще одну ось z, перпендикулярную им, с тем же началом в точке 0 (рис. 203). Теперь каждой точке пространства соответствуют три координаты, тройка чисел x, y, z. Именно в этом и состоит характерное свойство ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА.

9. В качестве упражнения изобразите на одном чертеже шесть точек с координатами: O (0; 0; 0), A (1; 0; 0), B (0; 1; 0), C (0; 0; 1), D (1; 1; 0), E (1; 1; 1). Чтобы чертеж получился более наглядным, свяжите систему координат с кубом, у которого ребро равно 1.

23 Оригами

Умеете ли вы делать из бумаги кораблик, самолетик или какие-либо другие фигурки? Наверняка умеете. Школьники увлекаются их изготовлением, сами не зная того, что занимаются древним японским искусством ОРИГАМИ.

Оригами — складывание фигурок из бумаги. Все фигурки складываются из прямоугольных листов бумаги (одного или двух), без помощи ножниц или клея (клей применяют разве что для склеивания половинок фигур, составленных из двух листов).

Оригами распространилось по всему свету. Во многих странах есть клубы оригамистов, членами которых являются люди самых разных профессий и возрастов. На рисунке 204 изображены фигурки-оригами: ворон, чайник, стоящий аист и попугай в полете. Придумывание их — настоящее искусство!

Мы же начнем с более простых фигурок — прыгающей лягушки, кузнечика, зайчика, сороки и фона-

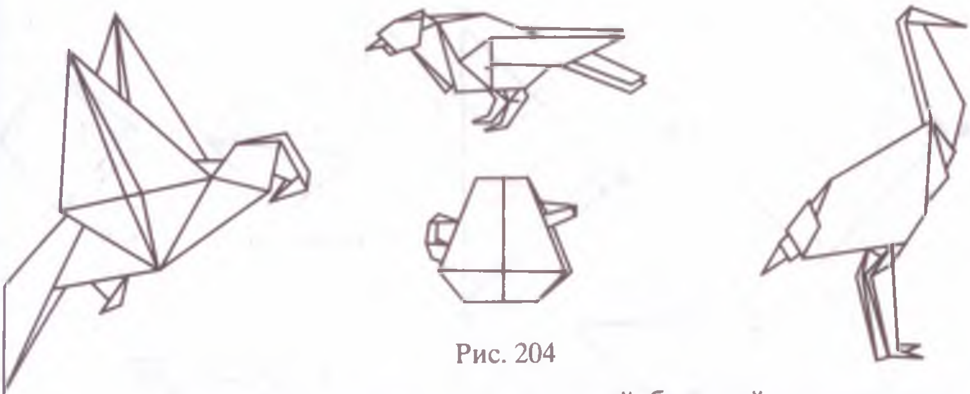


Рис. 204

рика. Вооружившись цветной бумагой, карандашом, линейкой и ножницами, приступайте к работе. Порядок изготовления показан на схемах. Внимательно изучите условные обозначения, а полученные промежуточные результаты каждый раз сверяйте с рисунком. Будьте усидчивы и аккуратны, и у вас появятся замечательные игрушки. Успеха вам!

Условные обозначения на чертежах:

- - - - - - - линии, по которым надо согнуть лист ребром внутрь (как полураскрытая книга)

.... линия сгиба, по которой надо согнуть лист ребром наружу (как крыша дома)

——— линии предыдущих сгибов

направление сгиба

согнуть и разогнуть

разъединить слои бумаги

A *C* *B* точки *A* и *B* свести в точку *C*

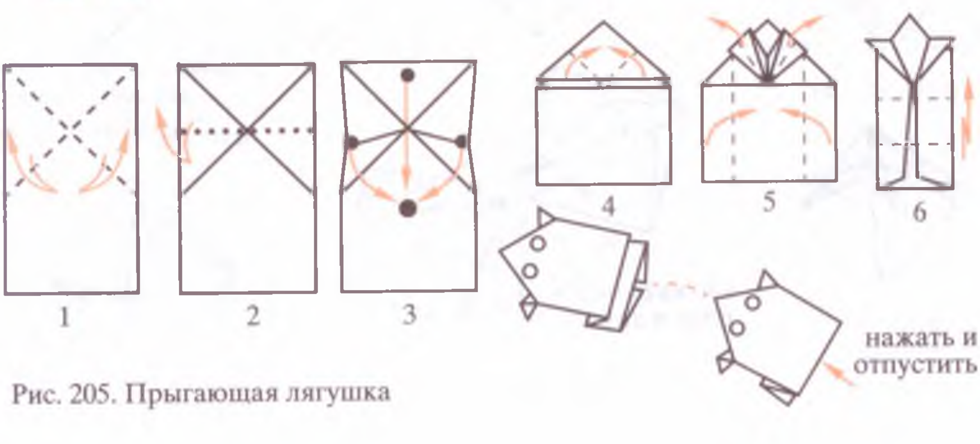


Рис. 205. Прыгающая лягушка

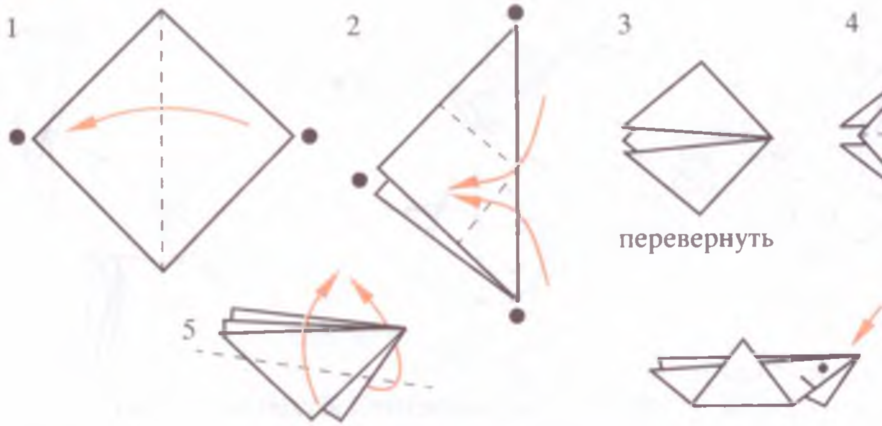


Рис. 206. Кузнечик

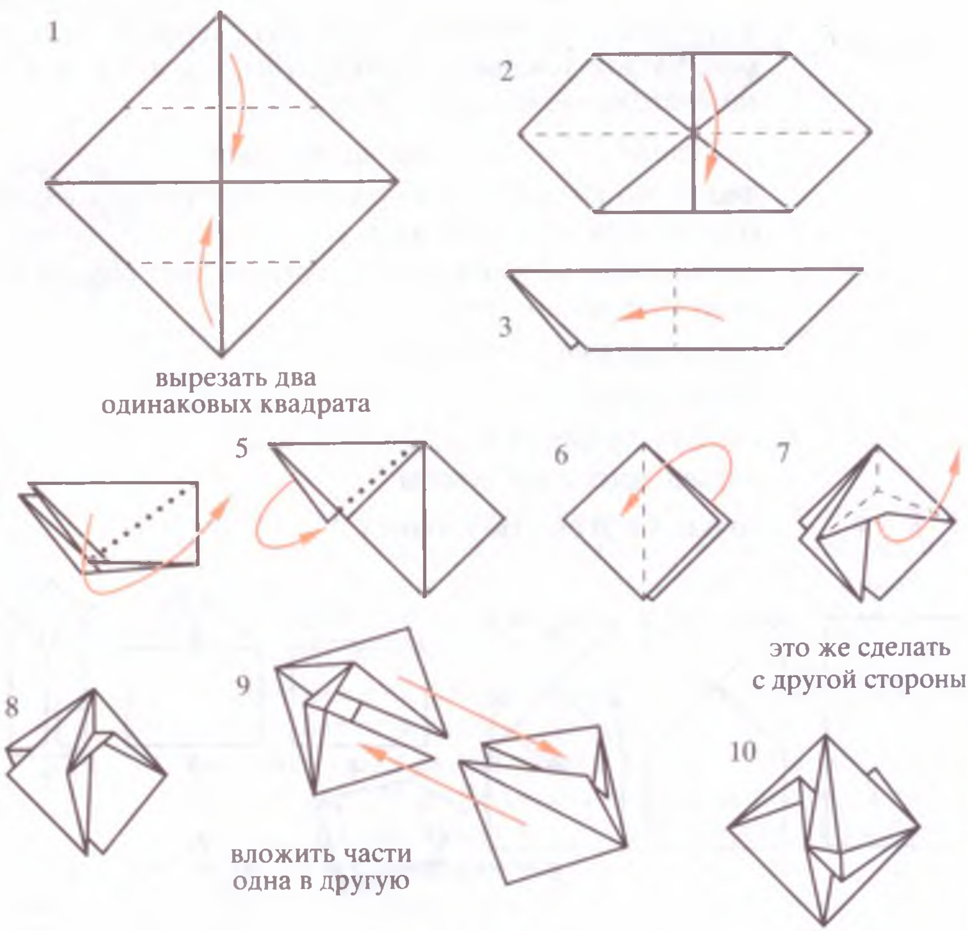


Рис. 207. Фонарик

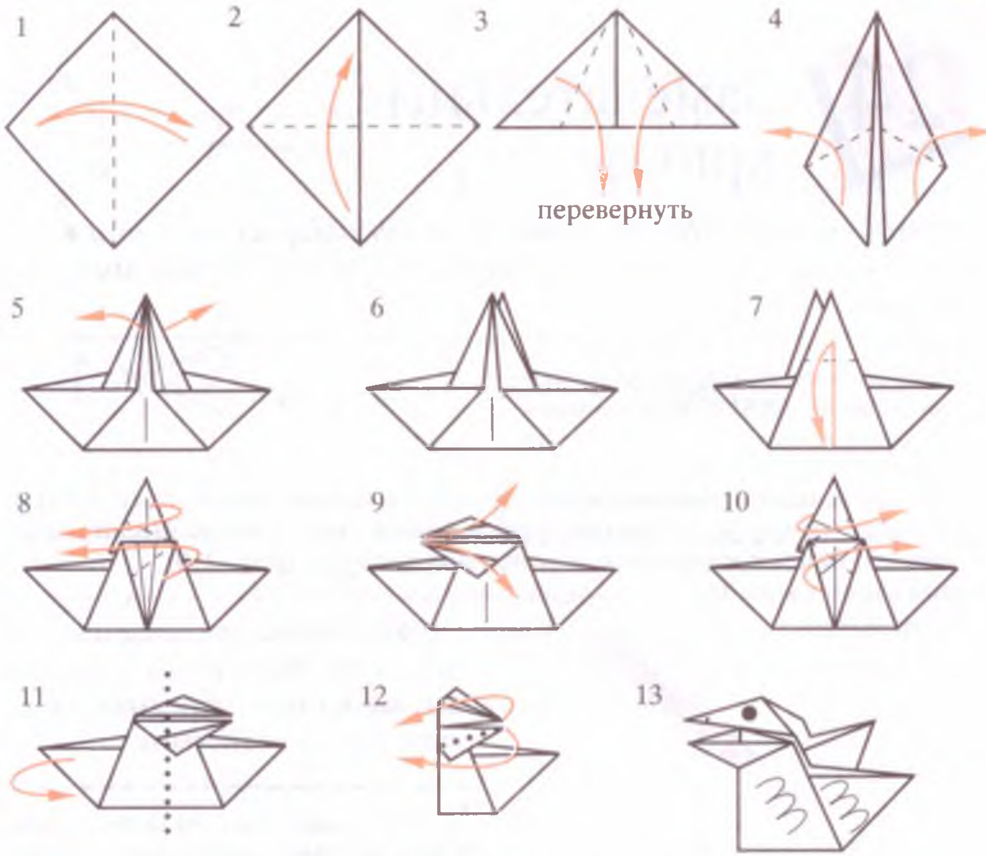


Рис. 208. Сорока

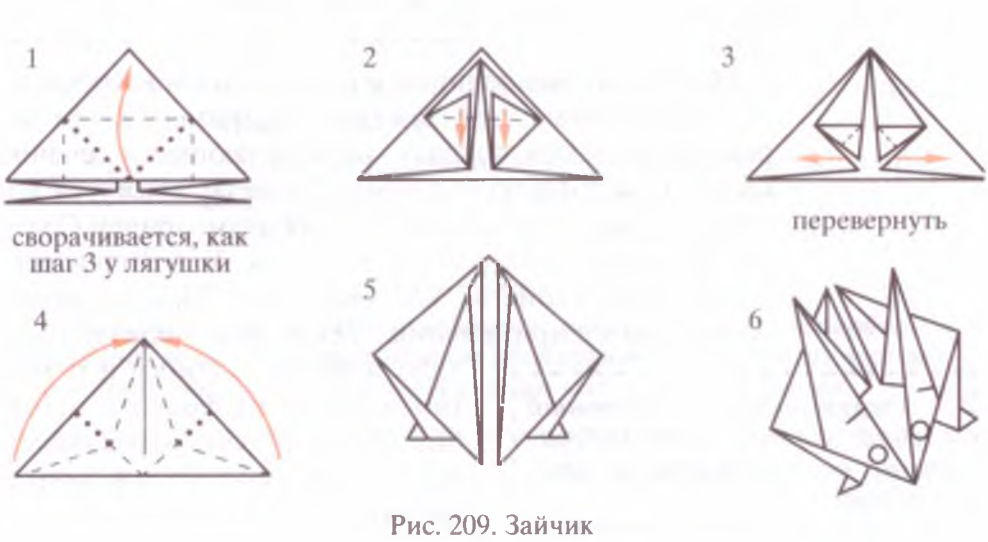


Рис. 209. Зайчик

24 Замечательные кривые

В этом параграфе вы узнаете о некоторых поистине замечательных кривых, населяющих удивительный мир геометрии.

Эллипс

Возьмите плотный лист бумаги, прикрепите к нему в двух точках нитку и натяните карандашом эту нитку. Нарисуйте линию, двигая карандаш и натягивая нитку (*рис.* 210).

Рис. 210

Эта линия называется ЭЛЛИПСОМ. Все точки эллипса, как видно из построения, обладают одним свойством:

Сумма расстояний от них до двух заданных точек плоскости (эти точки называются ФОКУСАМИ эллипса) постоянна.

На самом деле эллипсы в нашей жизни встречаются гораздо чаще, чем кажется. Например, когда мы режем наискосок колбасу, то получающееся сечение имеет эллиптическую форму. Планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов. У эллипса есть целый ряд свойств, которые могут иметь самые неожиданные применения. Так, если мы сделаем зеркало в форме эллипса и поместим в одном из фокусов источник света, то лучи, отразившись от зеркала, соберутся в другом фокусе.

Окружность — частный случай эллипса, она получается, если фокусы эллипса совпадают.

Гипербола

Для этой кривой мы не можем предложить, как в предыдущем случае, достаточно простой «гиперболический циркуль», позволяющий вычерчивать гиперболу и одновременно показывающий ее основное свойство. Поэтому начнем с указания основного свойства, задающего гиперболу.

$$AM_1 - M_1B = BM_2 - M_2A$$

Рис. 211

> ***Гипербола — это линия, для всех точек которой разность расстояний до двух заданных точек плоскости (фокусов гиперболы) есть величина постоянная (рис. 211).***

Гипербола состоит из двух частей (двух отдельных ветвей). Все точки одной ветви ближе к одному фокусу (соответствующим образом берется и разность расстояний), а другой ветви к другому.

Парабола

Возьмем на плоскости прямую l и точку F (рис. 212). Рассмотрим теперь такие точки M на плоскости, которые равноудалены от точки F и от прямой l. (Это значит, что длина отрезка FM равна длине перпендикуляра, опущенного из M на прямую l.) Такие точки M описывают замечательную кривую, которая называется ПАРАБОЛОЙ.

Рис. 212

Эта замечательная кривая не так уж редка в природе. Например, камень, брошенный человеком под углом к поверхности Земли, описывает параболу.

> ***Все только что рассмотренные линии (эллипс, гипербола и парабола) объединяются общим свойством. Каждая из них может быть получена при пересечении конуса плоскостью.***

Поэтому их называют КОНИЧЕСКИМИ СЕЧЕНИЯМИ (рис. 213).

Конус

Рис. 213

Что такое КОНУС, надеемся, вы представляете. Весь конус состоит из двух частей (пол), имеющих общую вершину. Из листа бумаги можно свернуть одну часть. Математики определяют конус следующим образом. Возьмем окружность и точку над ее центром. Эта точка — вершина конуса. Проводя прямые, соединяющие всевозможные точки окружности с вершиной, получим коническую поверхность. Конус можно пересечь плоскостью по окружности. Если плоскость сечения наклонять, то получим эллипс (плоскость 1 на рисунке 213). Увеличивая наклон плоскости, получаем все более вытянутые эллипсы. В конце концов эллипс превратится в параболу. При этом мы по-прежнему сечением задеваем лишь одну «полу» конуса (плоскость 2). Наклоняя плоскость дальше, мы пересекаем и вторую «полу». Появятся две ветви, парабола перейдет в гиперболу (плоскость 3).

Спираль Архимеда

Рис. 214

Пусть по радиусу равномерно вращающегося диска с постоянной скоростью ползет муравей. Проползая вперед, он одновременно смещается в сторону вращения диска.

Таким образом, путь муравья представляет кривую (рис. 214). Она называется СПИРАЛЬЮ АРХИМЕДА (в переводе с латыни спираль означает «изгиб», «извив»).

Синусоида

Сделайте из плотной бумаги, свернув ее несколько раз, трубочку. Разрежьте эту трубочку наклонно. Если трубочку не разворачивать, то в сечении будет эллипс. Какую линию образует разрез, если развернуть одну из частей трубочки? Перерисуйте эту линию на лист бумаги (*рис.* 215).

Рис. 215

Получится одна из замечательных кривых, называемая СИНУСОИДОЙ.

Кардиоида

Вырежьте два одинаковых картонных круга. Один из них закрепите неподвижно. Второй приложите к первому, отметьте на его краю точку A, наиболее удаленную от центра первого круга (рис. 216, а). Прокатите без скольжения подвижный круг по неподвижному и понаблюдайте, какую линию опишет точка A. Начертите эту линию.

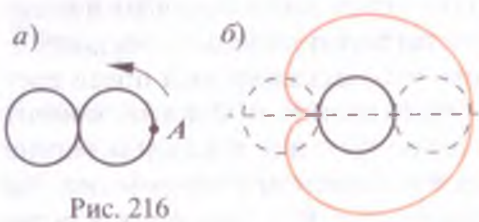


Рис. 216

Это КАРДИОИДА (рис. 216, *б*). Такое название она получила из-за сходства с сердцем (греческое слово «кардио» означает «сердце»).

Циклоида

Представьте, что по прямой линии без скольжения катится круг. Проследите за траекторией, которую опишет при этом точка A, взятая на окружности этого круга (рис. 217, а). Начертите получившуюся кривую.

Она называется ЦИКЛОИДОЙ (рис. 217, *б*). Циклоида обладает многими замечательными свойствами. Вот одно из них. Давно математики пытались решить такую задачу: какой формы должен быть гладкий желоб, соединяющий две точки *A* и *B* (*A* выше, чем *B*), чтобы гладкий металлический шарик скатился по этому желобу из точки *A* в точку *B* под действием своего веса за кратчайшее время? Можно подумать, что

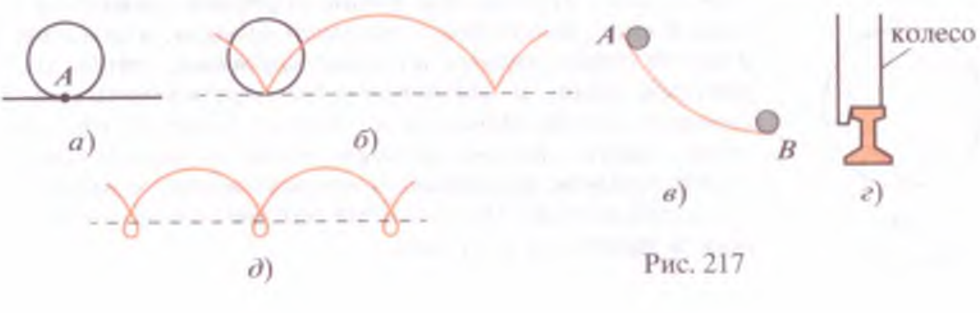
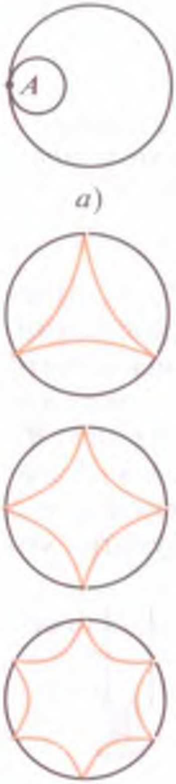


Рис. 217

желоб должен быть прямолинейным. Но это не так. Может быть, желоб следует выгнуть по дуге окружности, как думал великий итальянский физик, астроном и математик Галилео Галилей, живший на рубеже XVI—XVII вв.? Нет, Галилей ошибался. Только в 1696 г. швейцарский математик Иоганн Бернулли установил, что желоб должен быть выгнут по циклоиде, опрокинутой вниз (рис. 217, *в*).

В связи с циклоидами расскажем об одном интересном парадоксе (слово «парадокс» означает неожиданное явление, не соответствующее обычным представлениям). Допустим, что пассажирский поезд едет из Москвы в Киев. Оказывается, в каждый момент времени в этом поезде, более того, в каждом вагоне есть точки, движущиеся в обратном направлении. Вы можете удивляться, но это так. Все дело в устройстве железнодорожных колес. Если смотреть вдоль рельсов, то можно увидеть выступ на колесе (рис. 217, *г*), который опускается ниже рельса. Роль этого выступа очень велика, он не позволяет колесам сойти с рельсов. Так вот, самая нижняя часть колеса, находящаяся ниже его опорной точки, движется в направлении, обратном движению всего колеса.

Если выбрать крайнюю точку колеса, то линия, описываемая ею, будет выглядеть, как на рисунке 217, *д*. Обратное движение эта точка совершает в нижних частях маленьких петель.



а)

б)

Рис. 218

Гипоциклоиды

Возьмите кусок толстого картона и вырежьте в нем круг радиусом 12 см. ***Из того же материала вырежьте три круга радиусами*** 4 см, 3 см ***и*** 2 см. ***Положите кусок картона с вырезанным в нем отверстием на лист бумаги, вложите в этот вырез первый из трех кружков, чтобы он касался края, и отметьте на окружности маленького круга точку*** (*рис.* 218, *а*). ***Проследите затем, какую линию опишет отмеченная точка, когда кружок покатится по окружности выреза без скольжения. Проделайте то же самое со вторым и третьим кругами.***

Получившиеся линии — ГИПОЦИКЛОИДЫ (рис. 218, *б*).

Во что превратится гипоциклоида, если радиус меньшего круга равен 6 см, а большего — 12 см? Как выглядит гипоциклоида для кругов с радиусом 8 см, 9 см и 10 см?

25 Кривые Дракона

В этом разделе мы познакомим вас с одним интересным семейством линий, одна из которых нарисована ниже. Она заключена внутри дракона и своими изгибами обрисовывает его контур. Люди, видевшие драконов, подтверждают, что они выглядят именно так (рис. 219). Как получаются такие линии?

Рис. 219

Возьмите длинную полоску бумаги, левый конец которой пометьте точкой. Сверните ее пополам, чтобы точка оказалась закрытой, а потом еще пополам (всякий раз правый конец накладываем на левый). Разверните ее теперь так, чтобы линии сгибов отчетливо выделялись, и положите на стол. Точка должна быть слева. У вас получилась полоса (рис. 220). Изгибы идут в следующем порядке: вниз — вниз — вверх. Или, вводя обозначения Н *— вниз,* В *— вверх, это запишется так:* Н Н В.

Сложите полоску три раза пополам. Получится такая полоса (рис. 221). Изгибы теперь идут так: Н Н В Н Н В В.

Сложите самостоятельно полоску четыре и пять раз и запишите, как будут чередоваться изгибы. У вас должны получиться следующие цепочки букв: при четырех сгибах
Н Н В Н Н В В Н Н Н В В Н В В
при пяти сгибах:
Н Н В Н Н В В Н Н Н В В Н В В Н Н Н В Н Н В В В Н Н В В Н В В

Рис. 220

Рис. 221

Вы получили КОДЫ ДЛЯ РИСОВАНИЯ КРИВЫХ ДРАКОНА. Внимательно посмотрите на них и найдете некоторые закономерности. Например:

1) Число изгибов нечетное, причем если на каком-то шаге их было K, то на следующем будет $2K + 1$; сначала $2 \times 1 + 1 = 3$ изгиба, затем $2 \times 3 + 1 = 7$, потом $2 \times 7 + 1 = 15$ и т. д.;

2) в середине всегда Н*, а сгибы до этого среднего* Н *такие же, как и на предыдущем шаге;*

3) и самое главное, буквы, равноудаленные от среднего Н*, всегда различны.*

Следуя этим закономерностям, можно последовательно выписывать цепочки (коды) для полосок, сложенных любое число раз. Общее ПРАВИЛО ДЛЯ ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОГО КОДА К ДРУГОМУ:

Берем имеющийся код, приписываем к нему букву Н *(под ней удобно поставить точку), затем выписываем в обратном порядке буквы, предшествующие этому* Н*, заменяя* Н *на* В *и наоборот (посмотрите на коды, соответствующие четвертому и пятому сгибам).*

1. Пользуясь этим правилом, напишите цепочку-код для полоски, сложенной шесть раз.

Итак, мы научились получать коды сколь угодно длинные. Но все-таки при чем здесь драконы, как следует расшифровывать эти коды для построения кривых дракона? Возьмем лист клетчатой бумаги и проведем в нем вертикальную черточку по стороне одной клетки (рис. 222, *а*). Заменим в коде букву Н на Л (левый поворот), а букву В на П (правый поворот) и продолжим проведенную черточку, следуя командам кода и поворачивая последовательно налево и направо на 90°. На рисунке 222, *б—д* изображены «дракончики», соответствующие 1, 2, 3 и 4 складываниям.

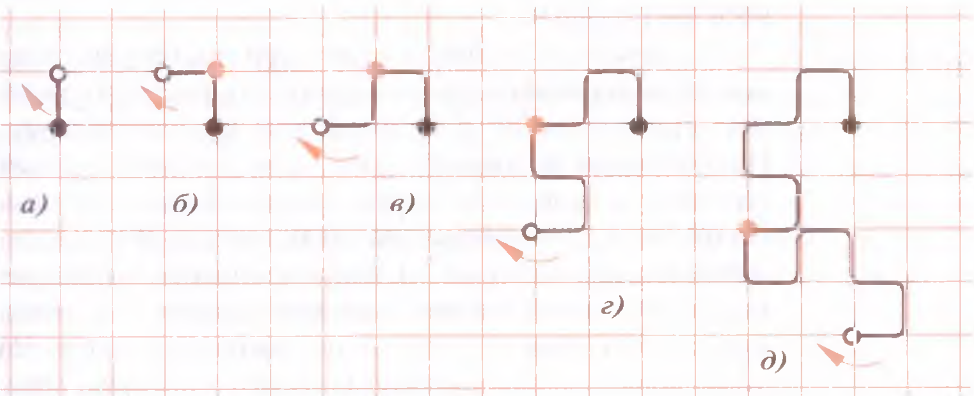


Рис. 222

Если всмотреться в эти линии, то можно увидеть, что каждую последующую можно получить из предыдущей, добавляя к ней такую же кривую, но полученную поворотом на 90° по часовой стрелке вокруг последней точки.

Повторение рисунка половины кривой при повороте на 90° (а следовательно, использование кальки для вычерчивания) можно объяснить с помощью исходной бумажной полоски. В свернутой полоске изгибы слоев повторяют друг друга. Развернем свернутую бумажную полоску, чтобы она стала двухслойной. Повернем один слой вокруг серединного сгиба на 90°.

Одна половина нашей кривой повернулась на 90°, повторив изгибы другой половины.

2. Постройте кривую, соответствующую шести сгибам полоски, из кривой в пять сгибов и обрисуйте ее контуром дракона.

3. Возьмите лист бумаги и нарисуйте разноцветными карандашами четырех драконов, «вырастающих» из одной точки (у первого дракона первая черточка идет вверх, у второго — вправо, у третьего — вниз, у четвертого — влево).

Эти драконы получаются из исходного при помощи трех последовательных поворотов на 90°. Драконы не пересекаются и последовательно заполняют весь лист бумаги.

Оказывается, не обязательно при построении кривых дракона всякий раз поворачивать ранее полученную кривую на 90° в одном и том же направлении. Направления вращений (по или против часовой стрелки) можно чередовать произвольным образом. На рисунке 223 изображена такая кривая. В углах, отмеченных кружочком (○), делается поворот всей предыдущей кривой против часовой стрелки, а в углах, отмеченных точкой (●), — по часовой стрелке. Из этого дракона также можно получить еще трех, «растущих» из той же точки.

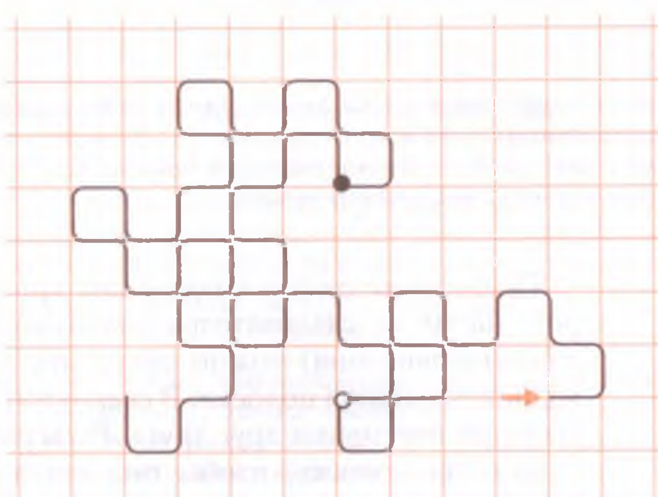


Рис. 223

26 Лабиринты

Знаете ли вы один из самых прекрасных древнегреческих мифов о победе Тесея над Минотавром?
Критский царь Минос приказал знаменитому художнику и архитектору Дедалу построить лабиринт. В этот лабиринт, с бесчисленными коридорами, тупиками и переходами, Минос поселил Минотавра (кровожадное существо с человеческим телом и головой быка) и потребовал у афинян, убивших его сына, раз в девять лет присылать на съедение чудовищу семерых сильнейших юношей и семь красивейших девушек. Их отводили в лабиринт, и юные афиняне, блуждая там, становились жертвами Минотавра. Когда афиняне готовили кровавую дань в третий раз, сын афинского царя Эгея, Тесей, задумал освободить родной город от позорной обязанности. Вместе с очередной группой жертв Минотавра он отправился на Крит с целью убить чудовище. Дочь Миноса, Ариадна, полюбила мужественного Тесея и решила помочь ему. Она дала Тесею волшебный клубок, который помог ему найти выход из лабиринта. Привязав конец нити у входа, Тесей пошел на поиски Минотавра. Поединок закончился победой юноши, который затем, идя обратно по нити Ариадны, вышел из лабиринта и вывел оттуда всех обреченных.

В 1900 г. английский археолог Артур Эванс провел раскопки на острове Крит, где обнаружил главный город Кносс и кносский дворец-лабиринт. Его архитектура поражает замысловатостью и отсутствием какой бы то ни было закономерности. На каждом шагу множество неожиданных переходов, причудливых лестниц и коридоров.

Лабиринты бывают самой разнообразной формы и устройства. До наших дней сохранились запутанно-сложные галереи, ходы пещер, извилистые планы на стенах и полах, обозначенные цветным мрамором или черепицей, извивающиеся тропинки на почве, рельефные извилины в скалах.

Слово «лабиринт» (греческое) означает «ходы в подземельях».

Как бы ни были сложны и запутанны эти ходы, всегда, однако, найдется выход. Безвыходных лабиринтов нет!

Решение (т. е. маршрут, ведущий к цели) каждого лабиринта может быть найдено одним из трех сравнительно простых методов.

Первый метод — МЕТОД ПРОБ И ОШИБОК. Выбирайте любой путь, а если он заведет вас в тупик, то возвращайтесь назад и начинайте все сначала.

Второй метод — МЕТОД ЗАЧЕРКИВАНИЯ ТУПИКОВ. Начнем последовательно зачеркивать тупики, т. е. маршруты, не имеющие ответвлений и заканчивающиеся перегородкой. Незачеркнутая часть коридоров будет выходом или маршрутом от входа к выходу или к центру (рис. 224).

Третий метод — ПРАВИЛО ОДНОЙ РУКИ. Оно состоит в том, что по лабиринту надо двигаться не отрывая одной руки (правой или левой) от стены.

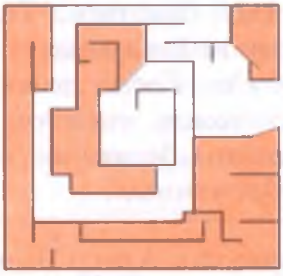


Рис. 224

Это правило не универсальное, но часто полезное. Им пользуются тогда, когда все стены хотя и имеют сложные повороты и изгибы, но составляют непрерывное продолжение наружной стены. Лабиринты не должны содержать замкнутых маршрутов.

Разобравшись в правилах, попробуйте пройти по следующим лабиринтам.

Рис. 225

1. Как можно достать из муравейника зернышко (рис. 225)?

2. Помогите Винни-Пуху пройти в домик Пятачка (рис. 226).

3. Можно ли пройти по лабиринтам, изображенным на рисунках 227, 228, пользуясь правилом одной руки?

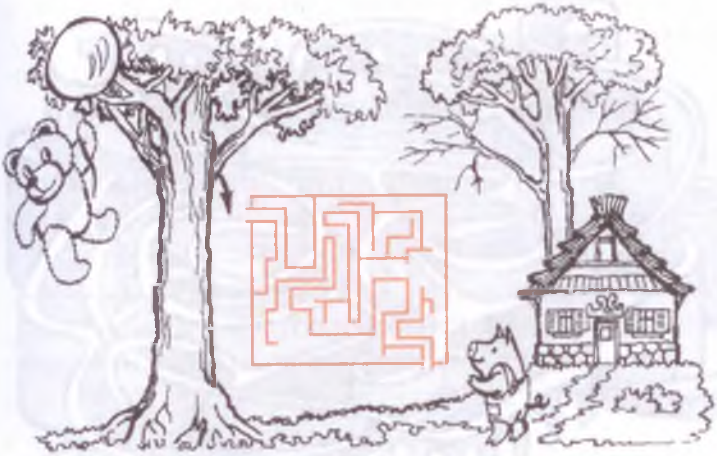


Рис. 226

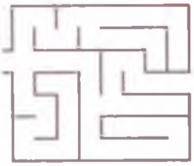


Рис. 227

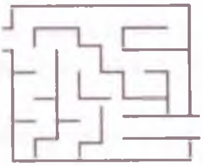


Рис. 228

4. Пользуясь правилом одной руки, пройдите к дереву по лабиринту, построенному в Англии в XIII в. (рис. 229).

5. Найдите путь к беседке, расположенной в парке (рис. 230).

6. Это лабиринт английского короля Вильгельма III (рис. 231), состоит из аллей и изгородей. Нужно пройти в центр к деревьям и скамейкам под ними.

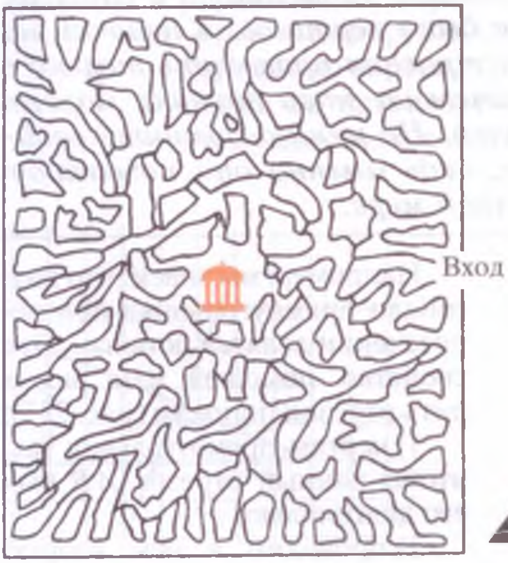


Рис. 230

Рис. 229

Рис. 231

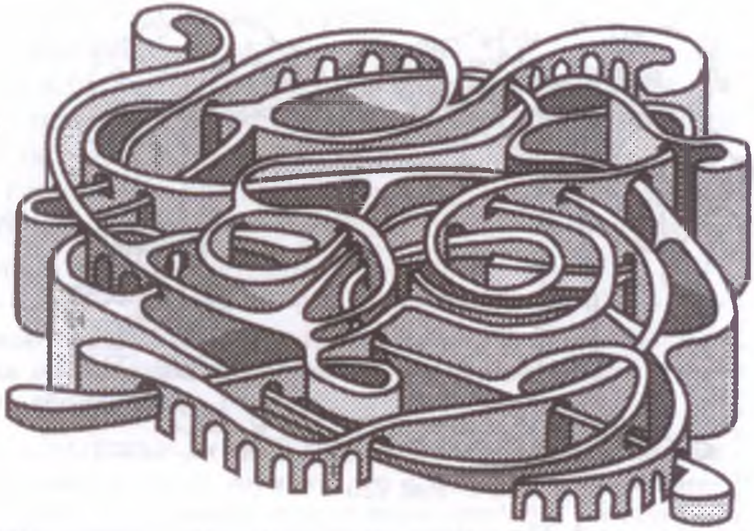


Рис. 232

7. Найдите путь от входа к выходу в пространственном лабиринте (рис. 232).

27 Геометрия клетчатой бумаги

Интересно, почему тетрадь по математике — в клеточку? Наверное, чтобы удобнее было записывать в столбик числа. А еще — чтобы легче было чертить. Клеточки на бумаге позволяют многие построения проводить только с помощью одной линейки, причем на этой линейке может даже не быть делений (шкалы). Но нужно помнить свойства геометрических фигур, ведь именно они позволяют использовать клеточки в полной мере.

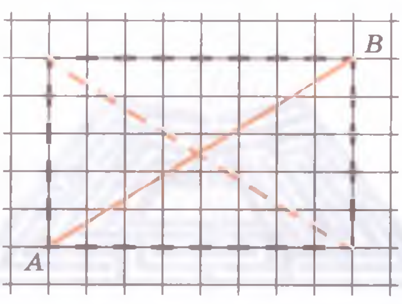


Рис. 233

Например, мы знаем, что диагонали прямоугольника при пересечении делятся пополам. Это свойство поможет нам разделить отрезок пополам (рис. 233):

1) чертим прямоугольник так, чтобы данный отрезок AB был его диагональю;

2) проводим в нем вторую диагональ.

Много полезного можно получить из ЭКСПЕРИМЕНТОВ с прямоугольным треугольником на клетчатой бумаге.

1. Начертите произвольный прямоугольный треугольник (1), а потом поверните его на 90° (рис. 234). Чему равен угол между большими сторонами получившихся треугольников? Измерьте его. Объясните результат.

2. Используя результат предыдущего опыта, постройте:

   а) перпендикуляр к отрезку, соединившему два любых узла клетчатой бумаги;

   б) перпендикуляр к отрезку, проведенный через его конец.

3. Постройте квадрат со стороной AB, где A и B — узлы клетчатой бумаги и отрезок AB не проходит по сторонам клеток.

4. Через точку A проведите прямую, параллельную прямой CD (рис. 235).

5. Постройте равнобедренный непрямоугольный треугольник (любой).

6. Начертите циркулем окружность радиусом 13 клеточек с центром в узле клетки. Через какие точки она проходит? Сформулируйте рекомендации для изображения окружности от руки по клеточкам, используя слова: вправо, влево, вверх, вниз. (Кстати, помните ли вы правило, позволяющее изображать от руки окружность на клетчатой бумаге?)

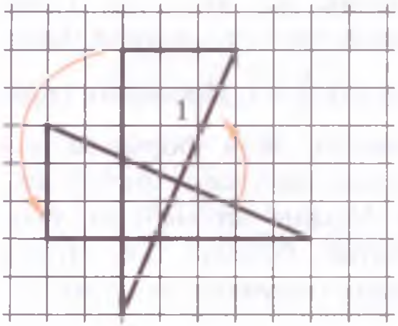


Рис. 234

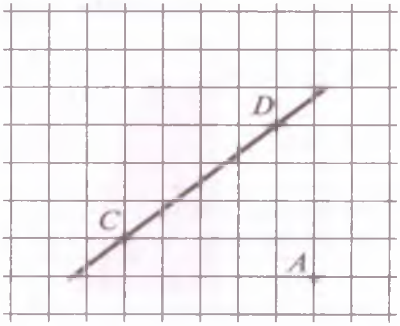


Рис. 235

7. Примем площадь одной клетки за единицу. Вершин треугольника лежат в узлах клеток. Как найти пло щадь этого треугольника, если это:

а) прямоугольный треугольник, две стороны кото рого проходят по сторонам клеток;

б) треугольник, одна сторона которого проходи по сторонам клеток;

в) произвольный треугольник?

8. Четырехугольник, изображенный на рисунке 236, о, ним прямолинейным разрезом разделите на две ра ные части.

9. Начертите два разных прямоугольных треугольник площади которых равны: а) 2 клеткам; б) 3 клетка в) 4,5 клетки.

10. Начертите квадрат, площадь которого равн а) 10 клеткам; б) 17 клеткам; в) 26 клеткам (испол зуйте задания 7 и 9).

11. Начертите несколько различных треугольников с ве шинами в узлах, но таких, что ни внутри, ни на гран це нет ни одного узла. Чему равна площадь каждо из изображенных вами треугольников?

Рассмотрим произвольный многоугольник с ве шинами в узлах.

Оказывается, существует удобная формула, с п мощью которой можно вычислить площадь любо такого многоугольника (эта формула названа имен немецкого математика Пика, открывшего ее). Пер считаем число узлов внутри многоугольника (пус это будет число a), а затем число узлов на грани включая вершины (обозначим это число b). Тог площадь многоугольника рав числу $a + \frac{b}{2} - 1$. Проверьте сп ведливость этой формулы д изображенного вами многоуго ника. Можно ли выбрать уз клетчатой бумаги так, что площадь получившегося мно угольника была равна $7\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$?

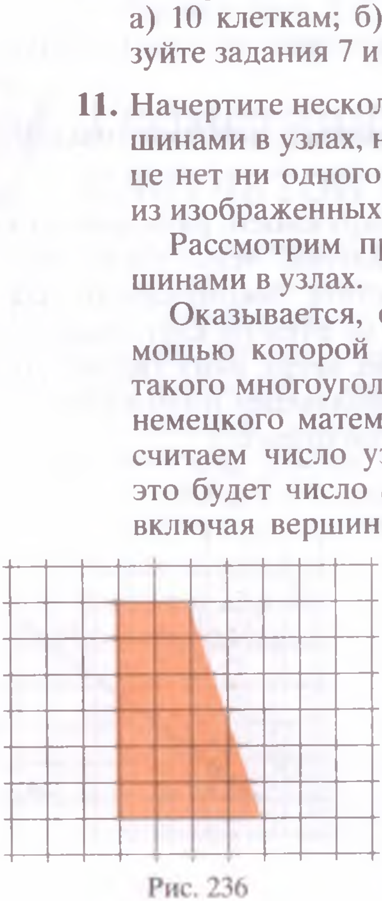


Рис. 236

28 Зеркальное отражение

Ежедневно каждый из нас по нескольку раз в день видит свое отражение в зеркале. Это настолько обычно, что мы не удивляемся, не задаем вопросов и вообще не обращаем внимания на зеркало и прочие пустяки. И только философы и математики не теряют способности удивляться. Вот что написал немецкий философ Иммануил Кант о зеркальном отражении:

«Что может быть больше похоже на мою руку или мое ухо, чем их собственное отражение в зеркале? И все же руку, которую я вижу в зеркале, нельзя поставить на место настоящей руки...»

Что же меняется в предмете при его отражении в зеркале? Проведем ОПЫТЫ С ЗЕРКАЛАМИ. Постарайтесь подметить особенности зеркального отражения и сделать из каждого опыта выводы. Выводы запишите в тетради.

Напишите свое имя печатными буквами в столбик и посмотрите на его отражение в зеркале. Поворачивает ли зеркало ваше имя? А имя ЮРА*? Чем отличаются записи* МАША *и* РОМА *(рис.* 237)*? Полоски с именами расположите параллельно поверхности зеркала.*

Проверьте, меняет ли зеркало местами:

а) левую и правую стороны, верх и низ, предметы спереди и сзади вас, если вы стоите лицом к зеркалу (рис. 238)*? А если вы встанете к зеркалу боком (рис.* 239)*?*

б) последовательность предметов, лежащих на столе, если поверхность стола перпендикулярна зеркалу (рис. 240)*?*

Представьте себя стоящим на зеркальном полу. Что меняется местами (рис. 241)*?*

На полоске бумаги горизонтально печатными буквами написаны слова ЧАЙ *и* КОФЕ*. Положите эту полоску перед зеркалом на стол.*

Почему зеркало не перевернуло слово КОФЕ *и до неузнаваемости изменило слово* ЧАЙ *(рис.* 242)*?*

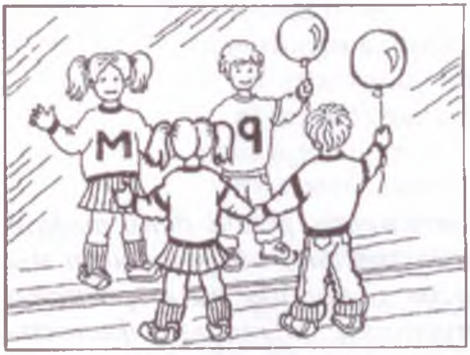


Рис. 237

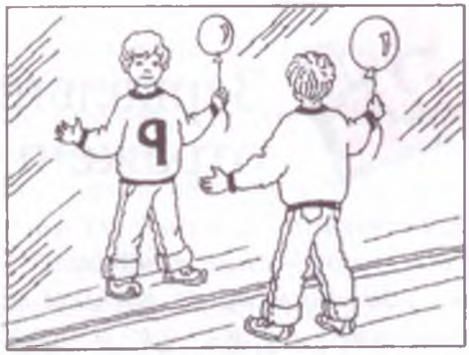


Рис. 238

Рис. 239

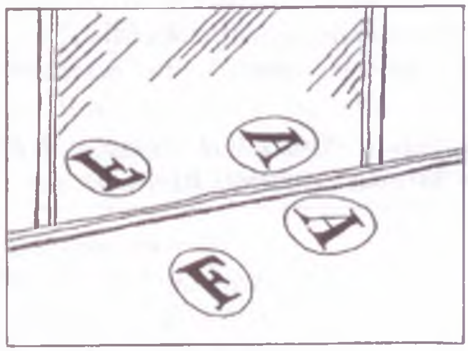


Рис. 240

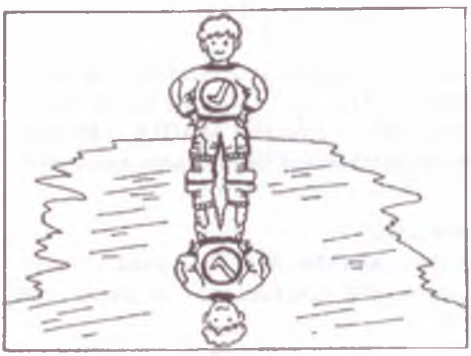


Рис. 241

Рис. 242

Поставьте два зеркала под прямым углом друг к другу. Поменялись ли на изображении местами правая и левая стороны? В зеркалах, стоящих перпендикулярно друг к другу, мы видим себя такими, какими видят нас другие люди. Почему?
Интересно, а какое изображение получится, если линия соединения зеркал будет горизонтальной?

Помните ли вы волшебные картинки в калейдоскопе, которые менялись от малейшего поворота? Они тоже получены путем отражения в нескольких зеркалах мелких кусочков разноцветного стекла.

Сделайте свой калейдоскоп из двух плоских зеркал, поставленных на лист белой бумаги под углом друг к другу. На листе между зеркалами нарисуйте какую-нибудь фигуру или произвольную линию. Измените угол между зеркалами. Сколько раз зеркала отражаются друг в друге?

Как зависит рисунок в вашем калейдоскопе от угла между зеркалами? Сравните рисунки, если угол между зеркалами равен 30°, 45°, 90°, 120° (*эти углы начертите с помощью транспортира на листе бумаги под зеркалами*). *Попробуйте зарисовать их в тетради. Какой рисунок вам понравился больше всего?*

Хоть и похожи друг на друга объект и его зеркальное отражение, но все-таки разница между ними огромная. Попытайтесь прочитать книгу, глядя не в нее, а в ее отражение в зеркале. Удастся ли вам написать хоть строку, глядя не на лист бумаги, а на его зеркальное отражение?

29 Симметрия

Опыты с зеркалами позволили нам прикоснуться к удивительному математическому явлению — СИММЕТРИИ. В древности слово «симметрия» употреблялось в значении «гармония», «красота». Действительно, в переводе с греческого это слово означает «соразмерность, пропорциональность, одинаковость в расположении частей».

Посмотрите на кленовый лист, снежинку, бабочку. Их объединяет то, что они симметричны. Если поставить зеркальце вдоль прочерченной на каждом рисунке прямой (рис. 243), то отраженная в зеркале половинка фигуры дополнит ее до целой (такой же, как исходная фигура). Потому такая симметрия называется ЗЕРКАЛЬНОЙ (или ОСЕВОЙ, если речь идет

Рис. 243

о плоскости). Прямая, вдоль которой поставлено зеркало, называется ОСЬЮ СИММЕТРИИ. Если симметричную фигуру сложить пополам вдоль оси симметрии, то ее части совпадут.

Среди фигур, изображенных на рисунке 244, выберите симметричные и проведите в них всевозможные оси симметрии.

Издавна человек использовал симметрию в архитектуре. Древним храмам, башням средневековых замков, современным зданиям она придает гармоничность, законченность (рис. 245).

Рис. 244

Рис. 245

Найдите как можно больше симметричных предметов, сооружений в окружающей обстановке дома и на улице.

Рис. 246

Рис. 247

Сравним две фигуры (кляксу и ажурную бумажную салфетку или «снежинку»). Клякса получилась так: на лист бумаги капнули чернил, сложили лист вдвое и затем разогнули. Линия сгиба — ось симметрии кляксы. Клякса (рис. 246) имеет одну (вертикальную) ось симметрии. Аналогичным образом получилась «снежинка», только лист бумаги согнули несколько раз, вырезали из этого «слоеного листа» кусок, а затем разогнули лист. У «снежинки» несколько линий сгиба, и все они являются осями симметрии. У этой «снежинки» (рис. 247) четыре оси симметрии. У геометрических фигур может быть одна или несколько осей симметрии, а может и не быть вовсе.

Мысленно перегибая бумагу, определите, сколько осей симметрии имеет каждая из фигур, показанных на рисунке 248. Как расположены оси симметрии фигуры, если их больше двух?

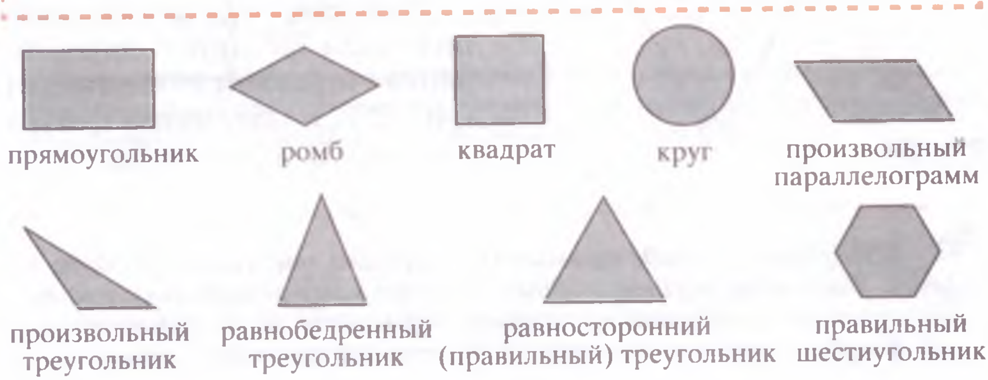


Рис. 248

Какая из изображенных на рисунке 248 фигур «самая симметричная»?

Какая самая «несимметричная»?

Определите, что общего у фигур, изображенных на рисунке 249.

Какая из фигур, приведенных на рисунке 250, лишняя?

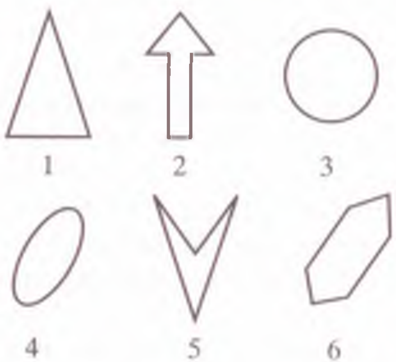


Рис. 249

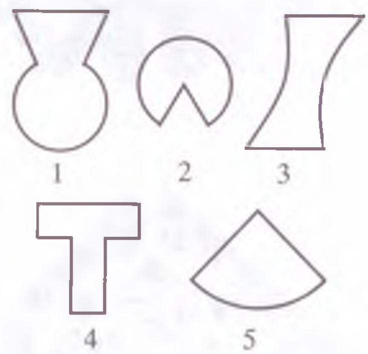


Рис. 250

1. Известно, что фигура имеет две оси симметрии. Чему равен угол между осями?

Вспомним опыт с двумя плоскими зеркалами (см. с. 131). С помощью составленного из двух зеркал калейдоскопа нам удавалось получать симметричные фигуры. Зеркально отражаясь, нарисованная на бумаге линия сама «достраивала» себя до некоторой симметричной фигуры.

Например, если зеркала стоят под углом 60° друг к другу, то линия отражается шесть раз (рис. 251) и полученная фигура имеет три оси симметрии.

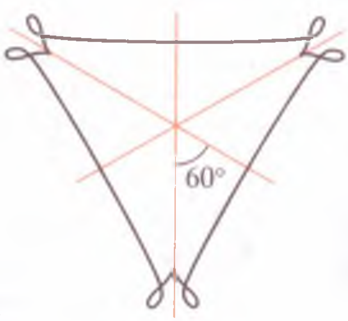


Рис. 251

Изобразите в виде прямых два зеркала под углом 90° друг к другу. Затем нарисуйте в одном из углов какую-либо линию и, не пользуясь настоящими зеркалами, дорисуйте ее до симметричной фигуры, которая получилась бы при отражении в зеркалах.

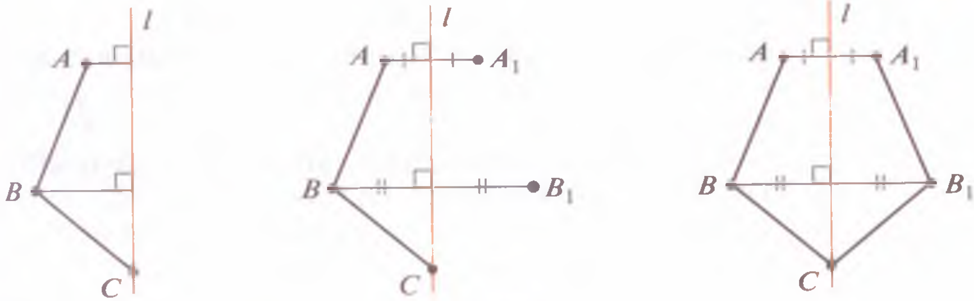


Рис. 252

В предыдущем задании построения выполнялись на глаз. А как точно нарисовать отражение фигуры в зеркале?

Представим, что l — зеркало (или ОСЬ СИММЕТРИИ). Построим отражение ломаной ABC (рис. 252).

1. Из вершин A и B опускаем перпендикуляры на прямую l.

2. Продолжаем их «за зеркало» на такое же расстояние (равное длине соответствующего отрезка).

3. Соединим полученные точки. Ломаная A_1B_1C — отражение ABC. (Точка C осталась на месте. Она лежит на оси симметрии.)

Пусть два зеркала поставлены параллельно друг другу отражающими поверхностями внутрь. Между ними на бумаге нарисована некоторая линия. Нарисуйте отражение этой линии в каждом из зеркал.

Два зеркала стоят перпендикулярно друг к другу. Между ними нарисована кривая, идущая от зеркала к зеркалу. Сколько раз отразится кривая в зеркалах? Сколько осей симметрии имеет полученная фигура? Проделайте опыт.

Постройте фигуру, получающуюся при отражении заданного отрезка в изображенных на рисунке 253 зеркалах. Сколько осей симметрии у каждой из получившихся фигур?

Рис. 253

2. Две прямые, пересекающиеся под углом 15°, являются осями симметрии некоторого многоугольника. Какое наименьшее число вершин может иметь этот многоугольник?

Кроме осевой симметрии существует еще и ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ. Она характеризуется наличием центра симметрии — точки *О*, обладающей определенным свойством. Можно сказать, что

Рис. 254

Точка О является центром симметрии, если при повороте вокруг точки О на 180° фигура переходит сама в себя (рис. 254).

Но такое определение удобно лишь для плоскости. А как быть с пространственными фигурами (телами)? Ведь понятие центральной симметрии распространяется и на трехмерное пространство.

Дайте определение центральной симметрии, удобное и для пространственных тел.

Приведите примеры плоских фигур, имеющих центр симметрии, но не имеющих оси (осей) симметрии. А теперь, наоборот, — фигур, имеющих ось (или оси) симметрии, но не имеющих центра симметрии.

Если фигура имеет и оси симметрии, и центр симметрии, то каким может быть число осей симметрии такой фигуры?

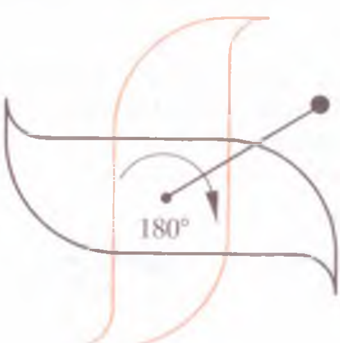


Рис. 255

Проверить, является фигура центрально-симметричной или нет, можно с помощью обычной иголки и кальки. Наложим на нашу фигуру кальку. Проколов фигуру в предполагаемом центре и обведя ее контур, надо повернуть фигуру на 180° вокруг иголки.

Если фигура «вошла» в свой контур, то она центрально-симметрична (рис. 255).

30 Бордюры

«Симметрия... есть идея, с помощью которой человек веками пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство». Эти слова принадлежат известному математику нашего столетия Герману Вейлю.

Как вырезать бумажные снежинки? Лист бумаги, чаще квадратный, но можно и круг, складывается вдвое по диагонали; полученный таким образом равнобедренный треугольник складывается пополам так, чтобы совпали боковые стороны; новый треугольник складывается еще раз и т. д. (рис. 256, *а*). В сложенной бумаге вырезается ножницами узор так, чтобы одновременно были прорезаны все слои бумаги. Форма вырезанного узора может быть какой угодно.

При однократном перегибании бумаги вырезанная снежинка имеет одну ось симметрии. Сколько осей симметрии будет иметь «снежинка», если бумагу перегнуть 2, 3, 4, 5 раз? Во сколько раз новое перегибание увеличивает число существующих осей симметрии? Поэкспериментируйте с бумагой (лучше, если это будет тонкая бумага) и ответьте на эти вопросы.

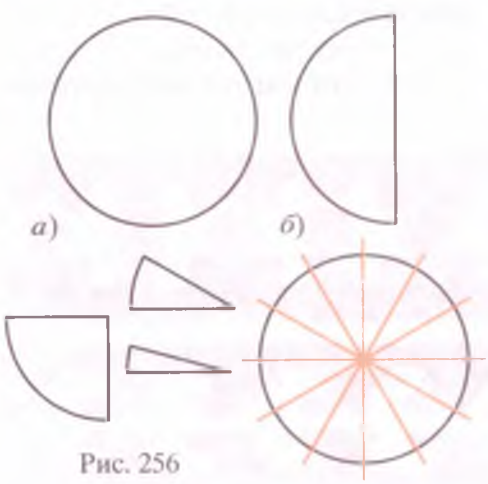


Рис. 256

Все снежинки, которые у вас получились, не совсем настоящие. Дело в том, что у настоящих, природных снежинок ВСЕГДА ШЕСТЬ ОСЕЙ СИММЕТРИИ. Как же сделать «настоящую снежинку»? Надо круг с помощью циркуля или транспортира разделить на двенадцать равных частей (подумайте, почему на двенадцать) и свернуть по диаметрам в любом порядке. Разметьте бумажный круг и вырежьте такую снежинку (рис. 256, *б*).

Подумайте, как получить «снежинку» с произволь ным количеством осей симметрии. На сколько частеı нужно разделить круг, чтобы у снежинки было n осеı симметрии?

Из бумаги можно вырезать и очень красивые сим метричные ленты.

а)

б)

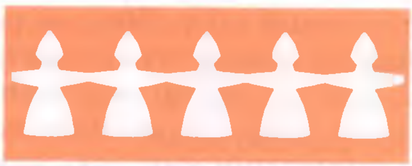


Рис. 257

Возьмите полоску бумаги шириной 5 см и длиной около 20 см. Сложите ее «гармошкой» и нарисуйте какой-нибудь рисунок, касающийся линии сгиба (рис. 257, а). Вырежьте фигуру, оставляя участки на линиях сгиба неразрезанными (подумайте почему); разверните полученную «гармошку».

У вас получилось кружево (рис. 257, *б*).

Если ленту предварительно сложить вдвое вдоль, а затем «гармошкой», то получится лента, симметричная относительно горизонтальной оси (рис. 258).

А эта лента (рис. 259) не совсем обычная. У нее нет вертикальных осей симметрии. Рассмотрите внимательно слои этой ленты. Как она должна быть сложена? Такие ленты вырезаются не ножницами, а ножом или лезвием: бумага «наворачивается» на линейку или другую жесткую основу поперек, с двух сторон на ней рисуется

Рассмотрев рисунки, вырежьте свои оригинальные ленты.

Рис. 258

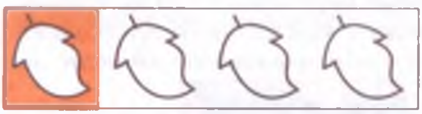
Рис. 259

одинаковый рисунок, и бумага прорезается до основы. Таким образом, четные и нечетные слои вырезаются отдельно.

Орнаменты в виде лент (БОРДЮРЫ) применяют маляры и художники при оформлении комнат, зданий. Для выполнения этих орнаментов изготавливают ТРАФАРЕТ. Трафарет представляет собой рисунок, вырезанный на листе картона или какого-либо другого плотного материала. Маляр передвигает трафарет, переворачивая или не переворачивая его, обводит контур, повторяя рисунок, и получает орнамент.

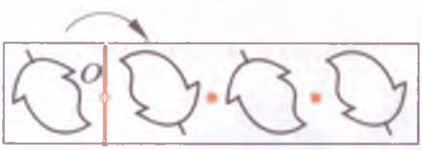
Пусть мы вырезали несимметричный трафарет (рис. 260, *а*). Передвинем трафарет вправо на расстояние, равное ширине трафарета (такое преобразование называется ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПЕРЕНОСОМ). Получим бордюр, показанный на рисунке 260, *б*. Отражаясь симметрично относительно вертикальной оси, трафарет даст бордюр, показанный на рисунке 260, *в*. Если трафарет поворачивать вокруг точки *O* (центра симметрии) на 180°, то бордюр уже будет иным (рис. 260, *г*). Отражением относительно горизонтальной оси и последующим переносом трафарета получим еще один орнамент (рис. 260, *д*).

а)



б) параллельный перенос

в) зеркальная симметрия относительно вертикальной оси



г) поворот на 180° вокруг точки *O* (центральная симметрия)

д) симметрия относительно горизонтальной оси + параллельный перенос

Рис. 260

Придумайте трафарет и нарисуйте с его помощью разные бордюры. Возьмите трафарет, симметричный относительно вертикальной оси, например, такой, как на рисунке 261. Сколько различных бордюров можно получить с его помощью? Какие преобразования (имеются в виду способы получения бордюров, показанных на рисунке 260, а—д) дают одинаковые бордюры? Объясните, почему так получается. Вырезав трафарет, изобразите эти бордюры.

Определите, сколько разных бордюров получится из трафарета, симметричного относительно горизонтальной оси (рис. 262). Какие преобразования дают одинаковый результат? Почему?

Мы можем взять и трафарет, рисунок которого совпадает сам с собой при повороте его на 180° вокруг центра (точки, лежащей внутри рисунка), например такой, как на рисунке 263.

Рис. 261

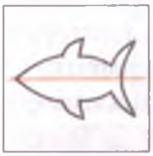


Рис. 262

Нарисуйте различные бордюры с его помощью. Совпадают ли результаты каких-либо преобразований? Дайте полный, обоснованный ответ на этот вопрос.

И последний вид трафарета — трафарет, имеющий две оси симметрии — вертикальную и горизонтальную (рис. 264).

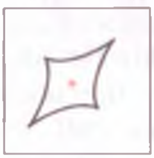


Рис. 263

Сколько различных бордюров можно составить из трафарета, изображенного на рисунке 264? Почему?

Итак, мы рассмотрели пять видов трафаретов. Их схематично можно изобразить так, как на рисунке 265, *а—д*.

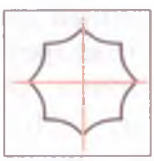


Рис. 264

Придумайте и нарисуйте свои трафареты этих пяти видов.

На Руси издревле люди старались украсить терема, церкви. Они придумывали удивительные замысловатые орнаменты, в основном цветочные. В XVII в. русский зодчий Степан Иванов создал свой орнамент, который назвал «Павлинье око», так как он был похож на рисунок пера павлиньего хвоста.

а) несимметричный; *б*) симметричный относительно вертикальной оси; *в*) симметричный относительно горизонтальной оси; *г*) центрально-симметричный; *д*) имеющий две оси симметрии

Рис. 265

Рассмотрите орнамент, изображенный на рисунке 266, выделите в нем трафарет. Подумайте, к какому типу можно его отнести. Как получен этот бордюр?

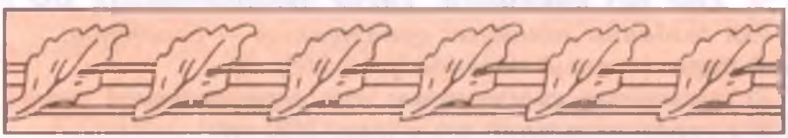
Гуляя по улицам, найдите различные бордюры на зданиях, в переходах, в метро и т. д.

Определите, из какого трафарета и с помощью какого преобразования получены бордюры, показанные на рисунке 267, а—е.

Нарисуйте какие-нибудь бордюры, используя в качестве трафарета буквы русского или латинского алфавита.

Рис. 266

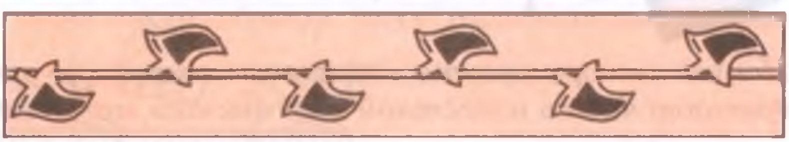
а)



б)

в)

г)



д)

е)

Рис. 267

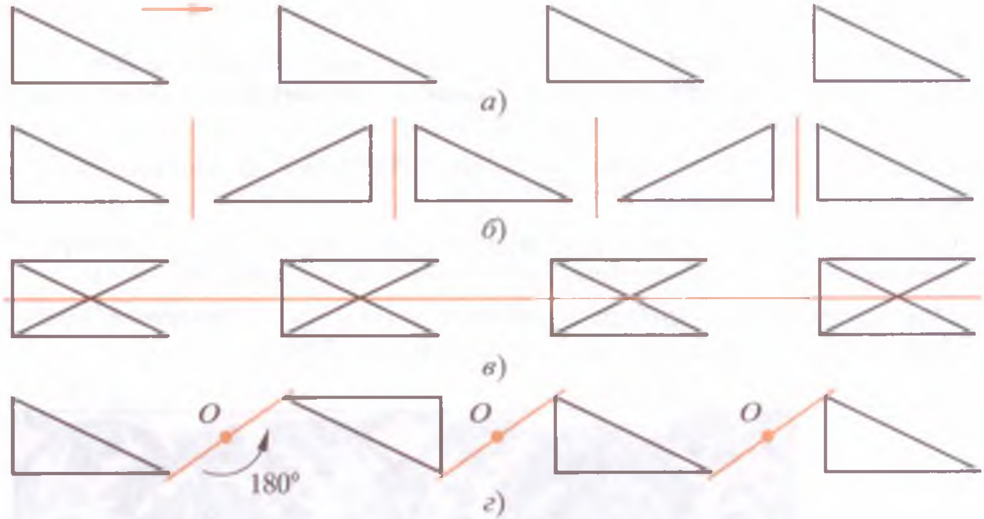


Рис. 268

Еще раз напомним, какие преобразования мы использовали для создания линейных орнаментов — бордюров:
1) параллельный перенос (рис. 268, а);
2) зеркальная симметрия: а) с вертикальной осью (рис. 268, б); б) с горизонтальной осью (рис. 268, в);
3) поворотная (центральная) симметрия (рис. 268, г).

Вдумайтесь в названия этих преобразований и объясните их.

31 Орнаменты

Искусство орнамента содержит в неявном виде наиболее древнюю часть известной нам высшей математики.

Герман Вейль

Кроме рассмотренных линейных орнаментов (бордюров) существуют плоские орнаменты, заполняющие лист бумаги (плоскость) без промежутков. Такие орнаменты называют ПАРКЕТАМИ. Это такие же паркеты, как в наших квартирах, как орнаменты на линолеуме, как рисунки на обоях.

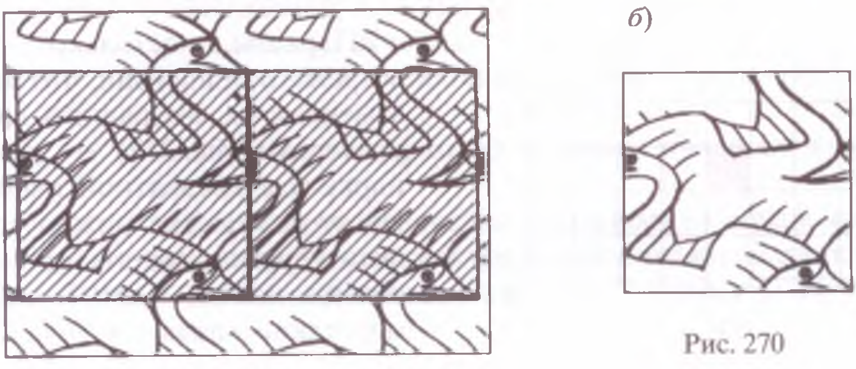
Рис. 269

Рассмотрите паркет, созданный Морисом Эшером. Можете ли вы догадаться, как он получен (*рис.* 269)?

Кажется, что придумать такой затейливый орнамент невероятно сложно. Конечно, без таланта здесь никак не обойтись. Но нужны и некоторые геометрические знания и умения. Овладев ими, каждый школьник сможет нарисовать свой неповторимый орнамент (паркет).

На паркете Мориса Эшера нас будут интересовать лишь линии, их изгибы и повторы.

Расчертив рисунок параллельными прямыми и получив таким образом сетку параллелограммов (рис.



а) *б*)

Рис. 270

Рис. 271

270, *а*), мы видим, что орнамент получен параллельными переносами параллелограммов, внутри которых проведены некоторые линии (рис. 270, *б*). Именно из них-то и складывается птичья стая.

***Выделите элементарную ячейку (трафарет) орнамента, изображенного на рисунке* 271.**

Рис. 272

Паркеты настолько часто встречаются в жизни, что мы не замечаем их. Тетрадный лист в клеточку (рис. 272) — пример паркета с квадратной ячейкой. На этой решетке можно составить и другие паркеты (их можно назвать РЕШЕТКАМИ), например, такие, как на рисунке 273.

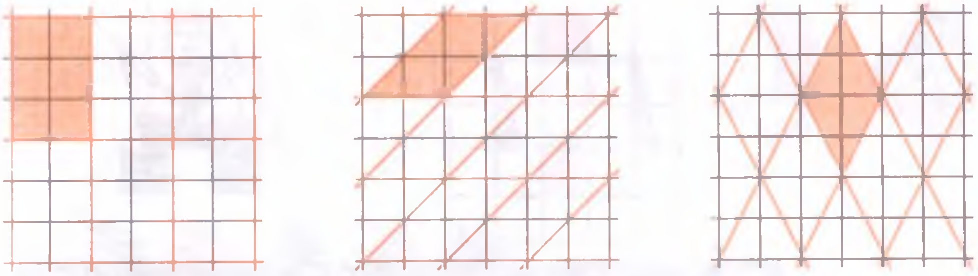


Рис. 273

Рис. 274

За элементарную ячейку можно взять и правильный треугольник. В этом случае плоскость заполняется без промежутков путем поворота треугольников вокруг их вершин на 60° (рис. 274).

1. Можно ли составить паркет из копий произвольного треугольника? Попробуйте сделать это. К какому виду решетки сведется такое покрытие плоскости?

2. Покрывается ли плоскость копиями произвольного четырехугольника?

3. Придумайте пятиугольную элементарную ячейку, из которой можно составить паркет.

4. Можно ли замостить плоскость равными шестиугольниками?

Из рассмотренных выше решеток можно сделать паркет с более замысловатыми ячейками.

Например, возьмем за основу квадратную решетку (рис. 275, *а*). Ячейка — квадрат 3×3 клетки. Проделаем с этой ячейкой-квадратом следующие операции.

1. Изменим верхнюю сторону квадрата (как на рис. 275, *а*).

2. Тогда, чтобы ячейки «вдвинулись» одна в другую, так же надо изменить и противоположную сторону.

3. К левой стороне квадрата пририсуем треугольник.

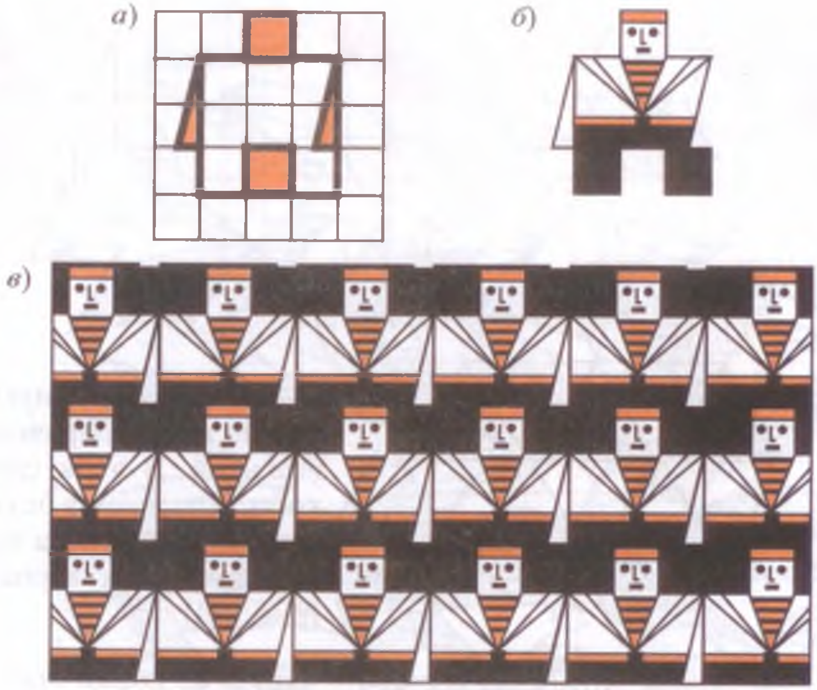


Рис. 275

4. Такой же треугольник мы должны вырезать с противоположной стороны.

5. Получилась ячейка. А теперь разрисуем ее, как на рисунке 275, *б*.

У нас получился «Хор моряков» (рис. 275, *в*). Этот паркет составлен вашим сверстником — шестиклассником Борей Сторонкиным.

Образцы паркета, данные на рисунке 276, *а*, еще раз покажут технологию изготовления плоских орнаментов и, может быть, натолкнут вас на собственное оригинальное решение.

Придумайте и вы свой паркет.

Используя тот же контур, но с другим рисунком внутри, можно сделать паркет из таких симпатичных «мордашек» (рис. 276, *б*).

5. На рисунке М. Эшера «Рептилии» (рис. 277) выделите элементарную ячейку и выясните, с помощью каких геометрических преобразований получен этот орнамент.

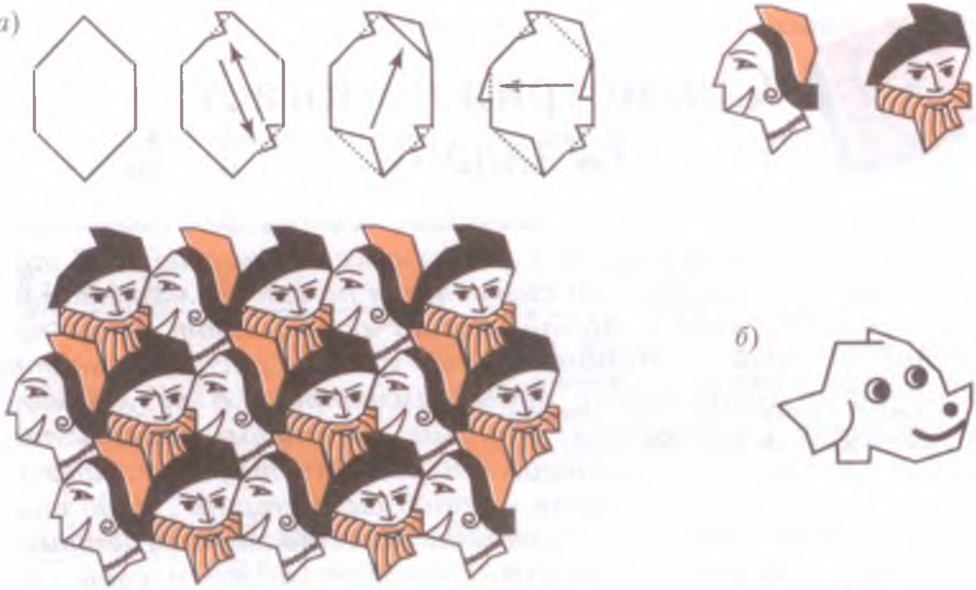


Рис. 276

Рис. 277

32 Симметрия помогает решать задачи

Как вы знаете, слово «симметрия» в переводе с греческого означает «одинаковость в расположении частей». В таком широком понимании симметрия не имеет математического содержания. Математики вкладывают в это понятие точный математический смысл, рассматривают некоторые специальные виды симметрии. В результате симметрия становится мощным средством математических исследований, помогает решать трудные задачи. А для того чтобы освоить «метод симметрии», надо сначала познакомиться с основными свойствами симметрии. Из этих свойств симметрии следует важное свойство плоскости.

---

1. Для любой точки плоскости всегда можно построить симметричную ей точку относительно некоторой прямой **(рис. 278).**

2. Отрезок, соединяющий симметричные точки, перпендикулярен оси симметрии и делится ею пополам **(рис. 279).**

3. Если отрезки M_1N_1 и MN симметричны относительно прямой l, то их длины равны **(рис. 280).**

4. Если точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l, то для любой точки B на этой прямой отрезки A_1B и AB равны **(рис. 281).**

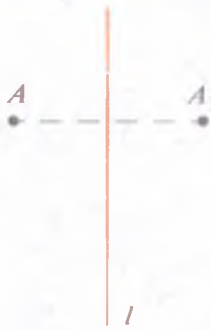


Рис. 278

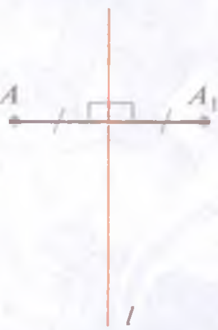


Рис. 279

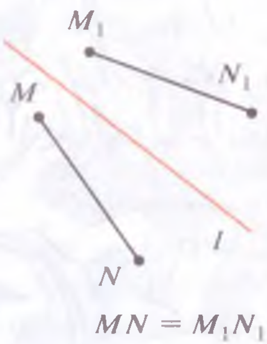


Рис. 280

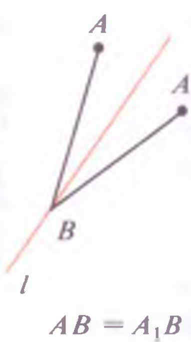
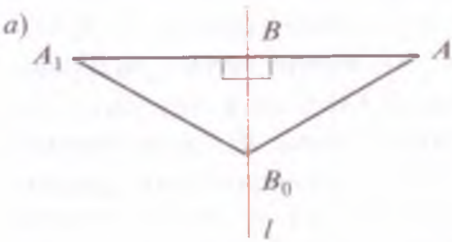


Рис. 281

Из этих свойств симметрии следует важное свойство плоскости.

> ***Если A — некоторая точка плоскости, а B — точка на прямой l, то длина отрезка AB будет наименьшей, если отрезок AB перпендикулярен l.***



Иными словами,

> ***Кратчайшим путем от точки до прямой является путь по перпендикулярному к этой прямой направлению.***

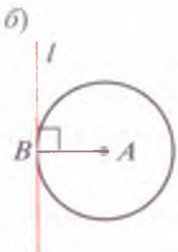


Рис. 282

Докажем это. Возьмем точку B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен l (рис. 282, *а*). Пусть B_0 — любая другая точка на l. Нам надо доказать, что AB меньше AB_0. Возьмем точку A_1, симметричную точке A относительно l. Тогда точка B будет лежать на отрезке AA_1, $AB = BA_1$ (свойство 2) и $AB_0 = B_0A_1$ (свойство 4). Отрезок AA_1 короче ломаной AB_0A_1. Значит, и AB меньше, чем AB_0, что и требовалось доказать.

Если мы теперь начертим окружность с центром в точке A, проходящую через точку B (т. е. AB — радиус), то эта окружность будет иметь с прямой l единственную общую точку — точку B (рис. 282, *б*). В этом случае говорят, что окружность касается прямой l или что прямая l есть касательная к окружности.

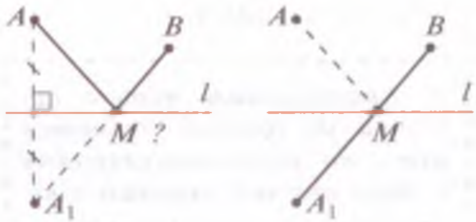
По существу, мы доказали одно очень важное свойство окружности и касательной к ней.

> ***Прямая, перпендикулярная радиусу окружности и проходящая через конец этого радиуса, касается окружности.***

Следующая задача является классической задачей геометрии и входит в ее золотой фонд.

1. Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой такую точку M, чтобы путь из A в B через M был кратчайшим, т. е. длина ломаной AMB была бы наименьшей (рис. 283, *а*).

Задача решалась бы совсем легко, если бы точки A и B лежали по разные стороны от прямой l. Мы бы просто соединили их отрезком и на пересечении с прямой l получили бы точку M. Но мы знаем, что для точки A_1, симметричной точке A относительно прямой l, $A_1M = AM$. Значит, путь A_1MB равен AMB. Отсюда и решение. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой l (рис. 283, *б*), проведем прямую A_1B. Тогда точка пересечения A_1B и l будет нужной нам точкой M.



а) *б*)

Рис. 283

Многие свойства окружности следуют из того, что она симметрична относительно любого своего диаметра. Попробуйте объяснить (доказать) следующие два свойства окружности:

2. Две параллельные прямые пересекают окружность. Рассмотрим на окружности две дуги, лежащие между этими прямыми. Оказывается, эти дуги всегда равны. Почему?

3. Возьмем окружность и точку A вне ее. Из этой точки к окружности можно провести две касательные. Пусть одна касается окружности в точке B, а другая — в точке C. Имеет место равенство $AB = AC$. Почему?

Кстати, именно это свойство симметрии окружности мы использовали в разделе 20 при построении параллельных и перпендикулярных прямых.

4. Ученик нарисовал на доске окружность, отметил на ней точки A, B и C и стер ее, оставив лишь эти точки. Как восстановить окружность?

5. На плоскости дан острый угол и точка A внутри него. Найти на сторонах угла две точки M и N так, чтобы длина замкнутого пути $AMNA$ ($AM + MN + NA$) была наименьшей.

33 Одно важное свойство окружности

«Ни тридцать лет, ни тридцать столетий не оказывают никакого влияния на ясность или красоту геометрических истин» — так сказал английский математик Ч. Л. Доджсон, более известный во всем мире под псевдонимом Льюис Кэрролл, автор сказок о девочке Алисе.

Каждая геометрическая фигура, и вы, конечно, это уже поняли, обладает многими интересными свойствами. Некоторые из этих свойств оказываются присущими только этой фигуре, являются характерными только для нее. Используя эти свойства, можно совершенно иначе, с неожиданной точки зрения определить хорошо знакомую геометрическую фигуру. Ниже мы предлагаем несколько задач, две из которых — с готовыми решениями. Хорошо разберитесь в них, чтобы суметь решить остальные задачи. Если это еще пока трудно для вас, не расстраивайтесь. Впереди достаточно времени: геометрия научит вас этому в старших классах.

1. Возьмем на плоскости какой-нибудь отрезок AB. Проведем через точку A любую прямую и опустим из B перпендикуляр на эту прямую. Получим точку M (рис. 284, *а*). Из этой точки M отрезок AB виден под прямым углом. Меняя прямую, проходящую через точку A, мы будем получать различные точки, которые будут описывать некоторую линию. Так вот, оказывается, что точка M будет описывать окружность, у которой AB является диаметром. Почему?

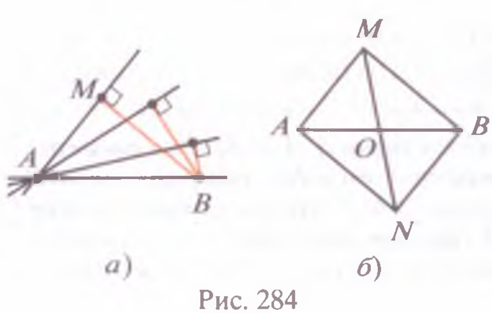


Рис. 284

Попробуем это объяснить. Достроим прямоугольный треугольник AMB до прямоугольника $AMBN$ (рис. 284, *б*).

Прямоугольник обладает тем свойством, что его диагонали равны между собой и делятся пополам в точке их пересечения.

Если точка O — середина AB, то OM — полдиагонали прямоугольника, т. е. $OM = \frac{1}{2}AB$. Значит, M лежит на окружности с центром O и радиусом $\frac{1}{2}AB$. Если мы построим на AB как на диаметре окружность и возьмем на ней любую точку M (рис. 285, *а*), то угол AMB будет прямым. В самом деле, если опустим из B перпендикуляр на прямую AM, то, как мы уже знаем, основание этого перпендикуляра должно лежать на окружности, а значит, оно должно попасть в точку M, так как прямая и окружность пересекаются не более чем в двух точках (рис. 285, *б*).

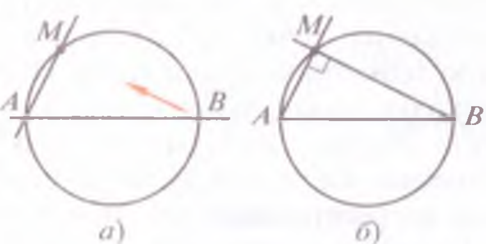


Рис. 285

Полученный нами результат можно сформулировать также следующим образом.

Вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

Зная это свойство, можно пополнить набор построений, показанный в разделе 20.

2. Дана прямая l и точка A на ней. С помощью циркуля и линейки проведите через A прямую, перпендикулярную l. Число проведенных при этом линий не должно быть больше трех (третьей должна быть искомая прямая).

Свойство угла, опирающегося на диаметр, является частным случаем следующего более общего свойства.

Возьмем окружность и две точки на ней A и B. Оказывается, какую бы точку M на окружности по одну сторону от AB мы ни взяли, все образующиеся углы AMB будут равны между собой. Более того, если точка O (центр окружности) лежит с той же стороны от AB, что и точка M, угол AMB равен половине угла AOB.

Чтобы объяснить, почему это так, нам потребуются два факта:

а) сумма углов треугольника равна 180°;

б) углы в равнобедренном треугольнике, лежащие против равных сторон, равны.

Пусть точка O лежит внутри треугольника AMB. Обозначим углы через x и y, как на рисунке 286, тогда угол $AOM = 180° - 2x$, а угол $BOM = 180° - 2y$. (Почему угол $AOM = 180° - 2x$? Треугольник AOM — равнобедренный. Углы OMA и OAM равны. Каждый равен x.) Но сумма трех углов, сходящихся в точке O, равна 360°. Два из них мы знаем. Найдем угол OAB. Он равен:

$$360° - (180° - 2x) - (180° - 2y) = 2(x + y).$$

Рис. 286

Но угол AMB равен $x + y$. Значит, в самом деле угол AOB в два раза больше угла AMB.

Рассмотрите самостоятельно случай, когда точка O расположена вне треугольника AMB (но M и O — с одной стороны от AB).

Теперь понятно, почему при перемещении точки M по дуге окружности угол AMB остается постоянным?

3. На рисунке 287 $ABCD$ — квадрат. Чему равны углы AMC, AMD, BMC?

4. На рисунке 288 ABC — правильный треугольник. Чему равен угол AMB?

5. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен 40° (рис. 289)?

6. На окружности радиусом 1 взяты три точки A, B, C так, чтобы угол ACB был равен 30°. Найдите длину отрезка AB.

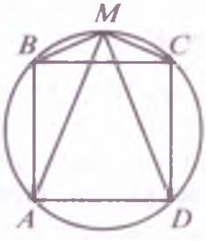


Рис. 287

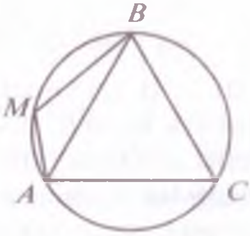


Рис. 288

Рис. 289

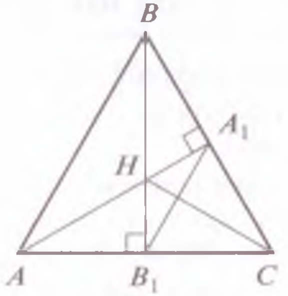


Рис. 290

7. В треугольнике ABC отрезки AA_1 и BB_1 перпендикулярны сторонам BC и AC (рис. 290). Докажите равенство углов HA_1B_1 и HCB_1.

8. Через некоторую точку плоскости проведены три прямые, образующие между собой углы по 60°. Возьмем любую точку плоскости и опустим на эти три прямые перпендикуляры. Основания этих перпендикуляров служат вершинами правильного треугольника. Почему?

34 Задачи, головоломки, игры

Много прекрасных плодов растет в саду под названием «Геометрия». Каждый может найти для себя задачу и интересную, и посильную. Но все же: «В задачах тех ищи удачи, где получить рискуешь сдачи».

1. Сколько граней у шестигранного карандаша?

2. Кузнецу принесли пять цепей, по три звена в каждой, и поручили соединить их в одну цепь. Кузнец решил раскрыть четыре кольца и снова их заковать. Нельзя ли выполнить ту же работу, раскрыв меньше колец?

3. Дан бумажный круг. Перегибанием бумаги найдите его центр.

4. Сделайте в тетрадном листке разрез так, чтобы в образовавшуюся дыру мог пролезть человек.

5. ДЕСЯТЬ БАШЕН. В древности один правитель желал построить десять башен, соединенных между собой стенами. Стены должны тянуться пятью прямыми линиями, с четырьмя башнями на каждой линии. Приглашенный строитель представил план (рис. 291), но правитель остался недоволен им: ведь при таком рас-

Рис. 291

положении можно извне подойти к любой башне. А правителю хотелось, чтобы если не все, то хоть одна или две башни были защищены стеной от вторжения извне. Строитель возразил, что нельзя удовлетворить этому условию, но правитель настаивал на своем. Долго строитель ломал голову над задачей и наконец решил ее. Попробуйте и вы найти несколько решений этой проблемы.

6. ПЛОДОВЫЙ САД. В саду росло 49 деревьев (рис. 292). Садовник решил расчистить сад от лишних деревьев для цветников. Позвав работника, он дал ему такое распоряжение: «Оставь только пять рядов деревьев, по четыре дерева в каждом. Остальные сруби и возьми себе на дрова за работу». Когда вырубка закончилась, садовник вышел посмотреть на работу. К его огорчению, сад был почти опустошен: вместо 20 деревьев работник оставил всего только 10, срубив 39 деревьев.

Рис. 292

— Почему ты вырубил так много? Ведь тебе сказано было оставить 20 деревьев! — распекал садовник работника.

— Нет, не сказано: «20». Сказано было оставить 5 рядов по 4 дерева в каждом. Я так и сделал.

Как ухитрился он вырубить 39 деревьев и все-таки выполнить указание?

7. Всмотритесь внимательно в узор (рис. 293). Постарайтесь запомнить его хорошенько. А теперь нарисуйте этот узор по памяти.

Рис. 293

8. Кусок бумаги имеет форму прямоугольника, одна сторона которого равна четырем, а другая — девяти единицам длины. Разрежьте этот прямоугольник на две равные части так, чтобы, сложив их определенным образом, получить квадрат.

9. Произвольный треугольник разрежьте на три части так, чтобы можно было сложить прямоугольник.

10. Какое наибольшее число различных сторон может быть в шестиугольнике, имеющем ось симметрии?

11. Разрежьте правильную шестиконечную звезду на четыре части так, чтобы из них можно было составить параллелограмм.

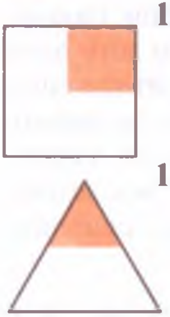


Рис. 294

12. Четвертые части квадрата и правильного треугольника отрезаны, как показано на рисунке 294. Каждую из оставшихся частей этих фигур разделить на четыре равные части.

13. Дано игровое поле 4×4 и 16 квадратов с геометрическими фигурами, имеющими ось (одну или несколько) симметрии (рис. 295). Разместить квадраты в клетках поля так, чтобы ни по горизонтали, ни по вертикали не встречались фигуры, имеющие одинаковое число осей симметрии.

Рис. 295

Рис. 296

14. Игра-конкурс букв и слов:

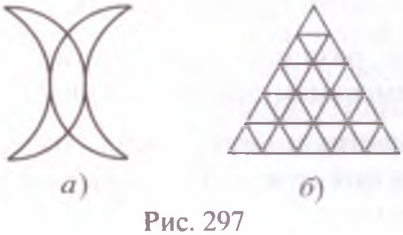
а) назовите буквы, имеющие одну, две оси симметрии;

б) составьте слова, имеющие ось симметрии (горизонтальную или вертикальную), например, ТОПОТ, СОН.

15. Разделите лунный серп (рис. 296) двумя прямыми линиями на шесть частей.

16. Нарисуйте одним росчерком фигуры, изображенные на рисунке 297, *а*, *б*.

17. Какое минимальное число плоских разрезов нужно сделать, чтобы разделить куб на 64 маленьких кубика? После каждого разреза разрешается перекладывать части куба как угодно.



а) *б*)

Рис. 297

18. Какой из восьми рисунков маляр накатал на стену изображенным на рисунке 298 валиком?

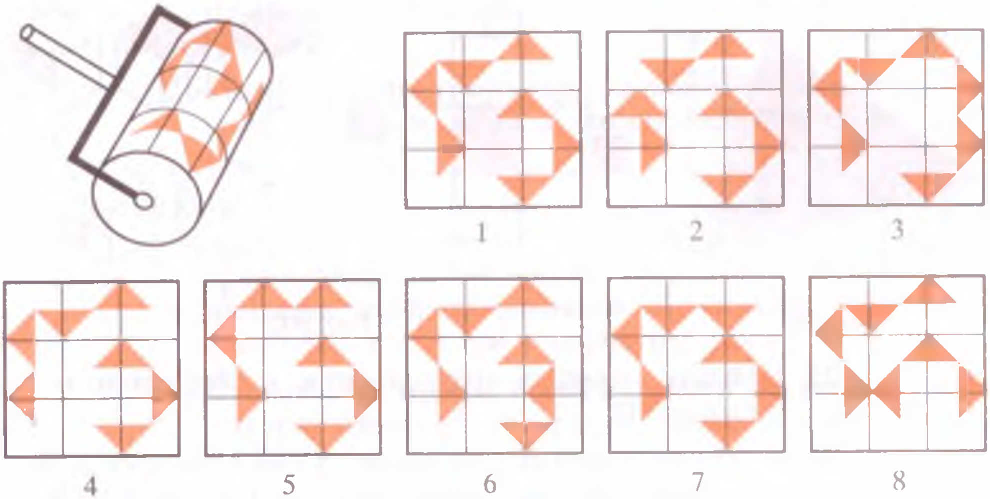


Рис. 298

19. Куб со стороной 1 м распилили на кубики со стороной 1 см. Получившиеся кубики выложили в ряд. Чему равна длина ряда?

20. Разрежьте квадрат на пять прямоугольников так, чтобы у любых двух соседних прямоугольников стороны не совпадали.

21. Из 12 спичек сложены четыре квадрата (рис. 299). Сторона равна одной спичке. а) Переложите четыре спички так, чтобы получилось три квадрата. б) Переложите три спички так, чтобы получилось три квадрата. в) Переложите спички, чтобы получилось шесть квадратов.

22. Три спички расположены так, как показано на рисунке 300. Добавьте еще только одну спичку так, чтобы концы спичек образовали квадрат.

23. Разрежьте правильный шестиугольник на девять одинаковых частей разными способами.

Рис. 299

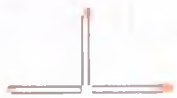


Рис. 300

24. У мастера есть лист жести размером 22×15 дм^2. Мастер хочет вырезать из него как можно больше прямоугольных заготовок размером 3×5 дм^2. Помогите ему.

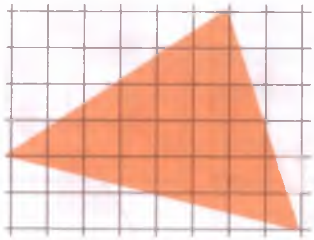


Рис. 301

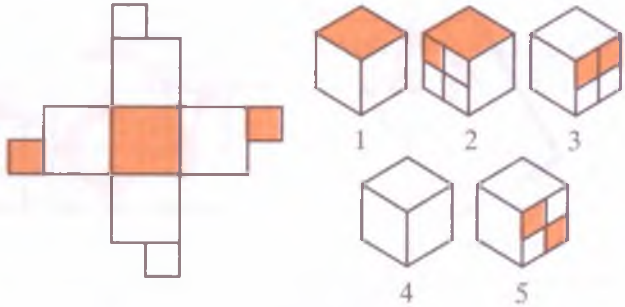


Рис. 302

25. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке 301.

26. В математических рукописях XVIII в. можно встретить утверждение, что фигуры с равными периметрами ограничивают равные площади. Верно ли это? Приведите примеры.

27. Развертка какого куба дана на рисунке 302?

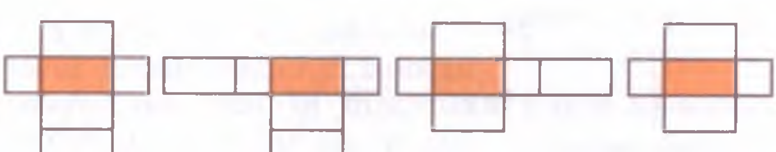
28. Определите, из каких разверток можно сложить параллелепипед (рис. 303).

29. Десять точек расположены так, как показано на рисунке 304. Сколько правильных треугольников можно построить, считая эти точки вершинами треугольников?

Какое наименьшее количество точек надо отбросить, чтобы не осталось ни одного правильного треугольника?

30. На книжной полке стоит трехтомник. Толщина каждого тома 3,5 см. Книжный червяк прополз от первой страницы первого тома до последней страницы третьего тома (по прямой линии). Какой путь он проделал? Толщиной обложки пренебречь.

31. Можно ли костяшками домино (каждая кость из двух клеток) выложить доску 8×8 клеток с двумя вы-



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 303

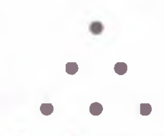


Рис. 304

резанными противоположными угловыми клетками (рис. 305)?

32. Может ли быть треугольник с очень большими сторонами и очень маленькой площадью? Приведите пример.

33. Какие фигуры могут получиться при пересечении двух треугольников? А при пересечении двух четырехугольников? Возможно ли, чтобы при пересечении двух четырехугольников образовалось два четырехугольника? А три четырехугольника?

34. В скольких точках прямая может пересекать контур треугольника? четырехугольника? пятиугольника и т. д.?

35. Равны ли два угла треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

36. Как посадить девять деревьев в десять рядов по три дерева в каждом ряду?

37. На сколько частей можно разбить плоскость двумя прямыми? тремя прямыми? четырьмя прямыми? На сколько частей разбивают плоскость прямые, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, если прямых: а) четыре; б) пять; в) шесть?

38. Для двух кубиков сделали по три развертки и перемешали их (рис. 306, *а*—*е*). Найдите развертки каждого кубика.

39. Вдоль бумажной ленты длиной 60 см проведена с двух сторон посередине прямая линия. Из этой ленты склеили лист Мёбиуса. Какой путь проползет мура-

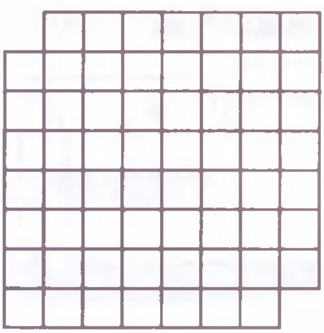


Рис. 305

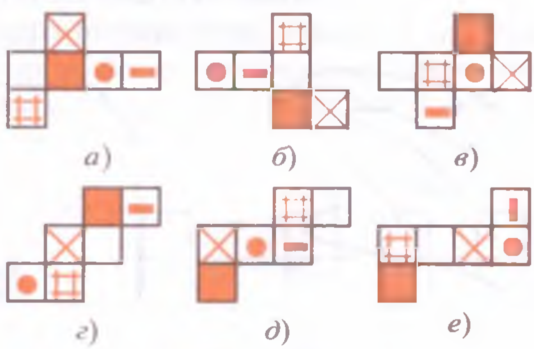


Рис. 306

вей вдоль отмеченной линии, пока не вернется в исходную точку?

40. На плоскости нарисована окружность. С помощью чертежного угольника найдите ее центр.

41. Расставьте на плоскости шесть точек таким образом, что если соединить первую точку со второй, вторую с третьей и т. д., а шестую вновь с первой, то каждый из шести отрезков ровно один раз пересекается с каким-либо другим отрезком.

42. На бумаге нарисована замкнутая линия (рис. 307). Перерисуйте эту линию в тетрадь. А теперь попробуйте другим цветом провести какую-нибудь замкнутую линию, не проходящую через точки самопересечения уже проведенной линии и не самопересекающуюся на этой линии. Постарайтесь провести линию так, чтобы число точек пересечения линий разного цвета было бы нечетным. Как вы думаете, возможно ли это?

43. Чему равны углы между отрезками, проведенными на гранях куба (рис. 308)?

44. На рисунке 309, *а—в* изображены части некоторых орнаментов. Внимательно рассмотрите их и, обнаружив закономерность в их построении, дорисуйте.

45. Рассмотрим линейку длиной 6 см. Если поставить на ней две метки: одну на расстоянии 1 см от одного края, а вторую на расстоянии 2 см от другого (рис. 310, *а*), то с помощью этой линейки, сдвигая ее определенным образом, мы можем измерить любой из отрезков длиной 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 5 см и 6 см. С помощью линейки на рисунке 310, *б* можно измерить все целочисленные отрезки от 1 см до 13 см. Убедитесь

Рис. 307

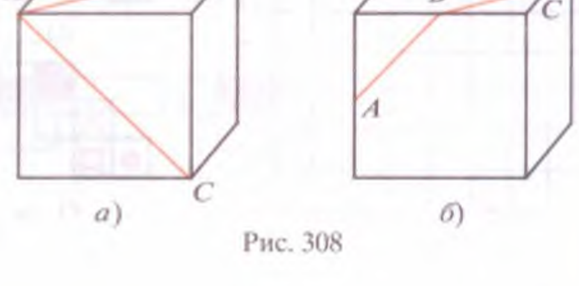
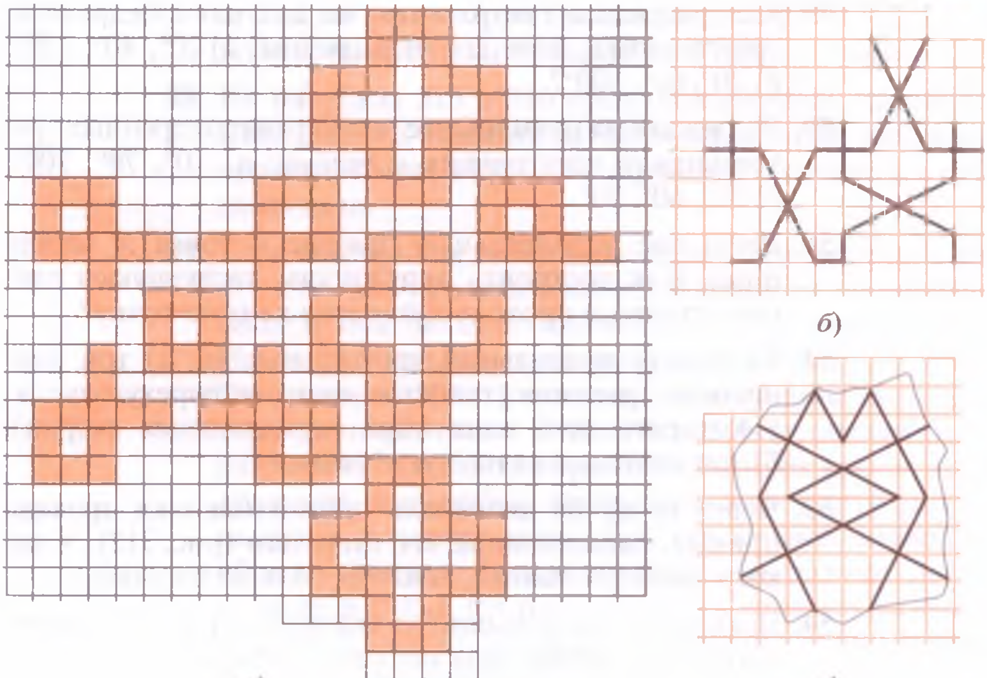


Рис. 308



а) *б)* *в)*

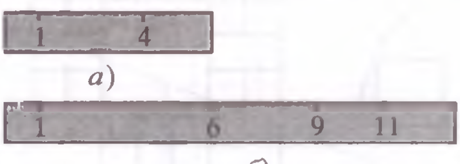
Рис. 309

в этом. Придумайте линейку длиной 9 см с тремя метками для измерения целочисленных отрезков от 1 см до 9 см. Придумайте линейку длиной 13 см с четырьмя метками внутри, отличную от уже рассмотренной.

46. Докажите, что в прямоугольном треугольнике, один из углов которого равен 30°, наибольшая сторона в два раза больше наименьшей.

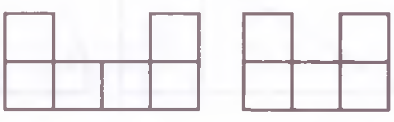
47. Замостите плоскость одинаковыми «скобками», изображенными на рисунке 311, *а*, *б*.

48. Ученик нарисовал на доске треугольник и отметил середины его сторон. Затем треугольник стерли, но отмеченные точки остались. Нельзя ли восстановить треугольник?



а) *б)*

Рис. 310



а) *б)*

Рис. 311

49. Как разрезать треугольник на два равнобедренных треугольника, если его углы равны: а) 20°, 40°, 120°; б) 20°, 60°, 100°?

50. Разрежьте на наименьшее число равнобедренных треугольников треугольник с углами: а) 10°, 70°, 100°; б) 50°, 60°, 70°.

51. Даны две параллельные прямые и точка *A* между ними. Как построить окружность, касающуюся данных прямых и проходящую через данную точку?

52. Разрежьте правильный треугольник на: а) три одинаковые трапеции (трапеция — это четырехугольник, у которого есть одна пара параллельных сторон); б) три одинаковых пятиугольника.

53. Через точку на диагонали прямоугольника провели прямые, параллельные его сторонам (рис. 312). У какого прямоугольника, А или Б, больше площадь?

54. Докажите, что меньший из квадратов (рис. 313) имеет площадь в четыре раза меньшую, чем больший.

55. На рисунке 314 изображен план городского сквера. В центре находится бассейн. В точках А и Б — вход и выход из сквера. Отрезки прямых — дорожки. Сколькими способами можно пройти из А в Б, если двигаться можно лишь вверх или вправо (можно идти по границе сквера и кромке бассейна)?

56. Разрежьте квадрат 13×13 на пять прямоугольников так, чтобы все десять чисел, выражающих стороны прямоугольников, были бы различными целыми числами.

57. Рассмотрим куб $3 \times 3 \times 3$, составленный из 27 одинаковых кубиков. Со всех шести сторон (спереди и сзади, справа и слева, сверху и снизу) мы видим квадрат 3×3. Какое наибольшее число кубиков можно убрать,

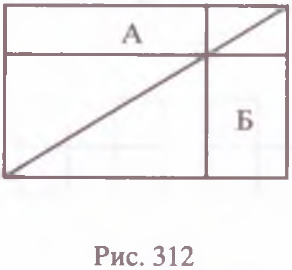


Рис. 312

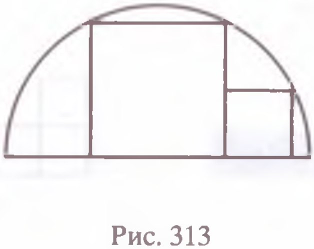


Рис. 313

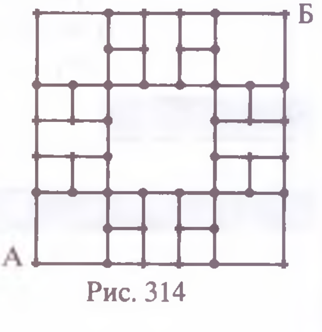


Рис. 314

чтобы со всех сторон был виден квадрат 3×3 и при этом оставшаяся система кубиков не развалилась?

58. На рисунках 315 и 316 проиллюстрирован парадокс. Квадрат 8×8 разрезан на части, из которых составлен прямоугольник 13×5. Постарайтесь объяснить, в чем здесь дело.

59. Если вы считаете, что в математике, в геометрии в частности, все уже известно, то очень и очень ошибаетесь. В ней великое множество нерешенных задач. Некоторые из них остаются нерешенными столетиями. Так, лишь в 1976 г. с помощью современных компьютеров математиками В. Хикеном и К. Аппелем была разрешена знаменитая проблема четырех красок. Они доказали, что любую географическую карту можно окрасить в четыре цвета так, что страны, имеющие общую границу, будут окрашены в разные цвета. Правда, в 1975 г. (за год до этого) в апрельском номере американского журнала «В мире науки» была приведена карта, которую, как утверждал ее составитель, нельзя окрасить нужным образом в четыре цвета. Покажите, что это всего лишь первоапрельская шутка: раскрасьте эту карту (рис. 317) из 100 стран в четыре цвета так, чтобы соседние страны были окрашены в разные цвета.

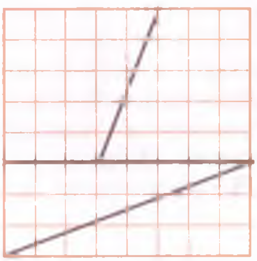


Рис. 315

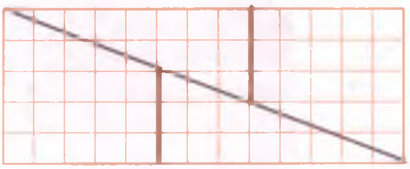


Рис. 316

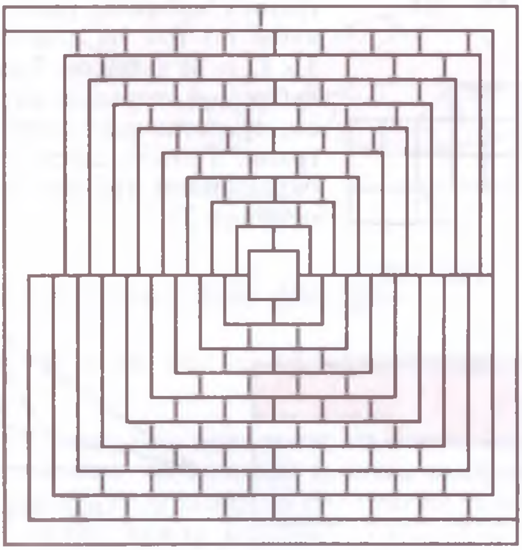


Рис. 317

Подсказки, ответы, решения

1. Первые шаги в геометрии

1. Сложите спички в виде пирамиды — три спички лежат на столе, образуя треугольник, а три оставшиеся концами упираются в вершины треугольника и сходятся в общей точке пространства.

2. Рисунок 318, *а*, *б*, *в*.

а)

б)

в)

Рис. 318

3. Не отрывая карандаша от бумаги, можно нарисовать открытый конверт: начинать надо с нижнего уголка. А почему нельзя нарисовать закрытый конверт, не отрывая карандаша от бумаги, вы узнаете из раздела 15.

4. Рисунок 319.

5. Если постараться, то можно из арбуза вырезать кусок в виде столбика, идущего сквозь весь арбуз. У этого куска будут две корки, соединяемые арбузной мякотью. Оставшуюся часть арбуза можно разрезать на «нормальные» куски.

6. Рисунок 320. Закрашенную часть после разрезания по пунктирным линиям перевернуть «наизнанку».

7. Рисунок 321.

8. Всего после распиливания получилось $5 \times 5 \times 5 = 125$ кубиков (рис. 322). По три окрашенных грани может быть только у угловых кубиков; их 8 штук. По две окрашенных грани у кубиков, расположенных вдоль ребер исходного куба: по три на каждом ребре. Всего ребер 12, значит, $3 \times 12 = 36$ кубиков. Только одна закрашенная грань у тех кубиков, которые лежат «на поверхности», исключая кубики, прилегающие к ребрам, т. е по девять штук на каждой грани. Граней шесть, таким образом, кубиков с одной окрашенной гранью $6 \times 9 = 54$. Неокрашенных кубиков осталось 27.

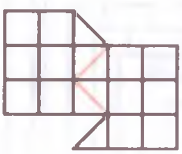


Рис. 319

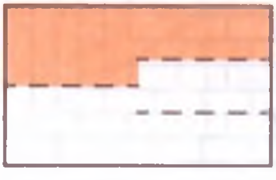


Рис. 320

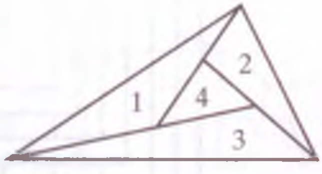


Рис. 321

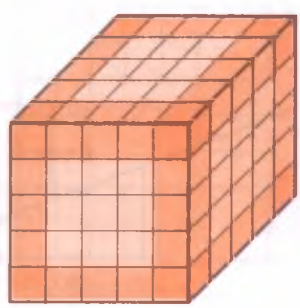


Рис. 322

2. Пространство и размерность

1. Если считать, что в два раза больший квадрат — это квадрат, сторона которого в два раза больше стороны исходного квадрата, то для его получения надо взять четыре одинаковых исходных квадрата. А кубиков — восемь (рис. 323, *а*, *б*).

а)

б)

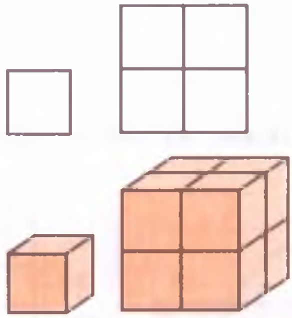


Рис. 323

2. Рисунок 324. Надо соединить отрезками середины сторон треугольника.

3. Пример многогранника, у которого восемь вершин и восемь граней, — пирамида, в основании которой лежит семиугольник (рис. 325).

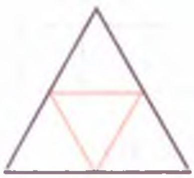


Рис. 324

Рис. 325

4. Рисунок 326, *а*, *б*.

5. Блин можно разрезать на семь частей (рис. 327, *а*); в отличие от блина каравай не плоский и его сначала можно разрезать горизонтально, а потом вертикально (рис. 327, *б*). Таким образом, каравай можно разрезать на восемь частей.

а) *б*)

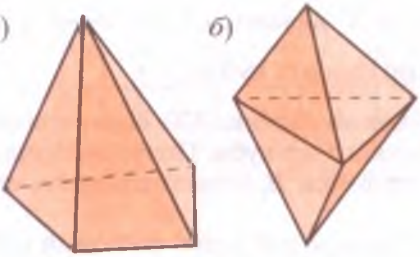


Рис. 326

а) *б*)

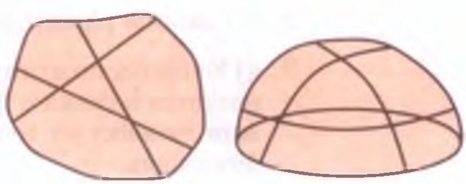


Рис. 327

3. Простейшие геометрические фигуры

1. Если считать только углы не больше 180°, то образуется 12 углов.

6. Если сложить квадрат вдвое по диагонали, то половинки его совпадут; треугольники, на которые делится квадрат своей диагональю, равны. Угол квадрата (90°) также складывается пополам; значит, между диагональю квадрата и его сторонами образуются углы по 90° : 2 = 45°.

7. Углы не превосходят 180°, поэтому получаем 90°, 60°, 180°, 150°, 165°.

8. Угол не изменится.

4. Конструирование из Т

2. Рисунок 328, *а*, *б*.

4. Рисунок 329. Буква Т составлена из шести квадратов со стороной 1 см.

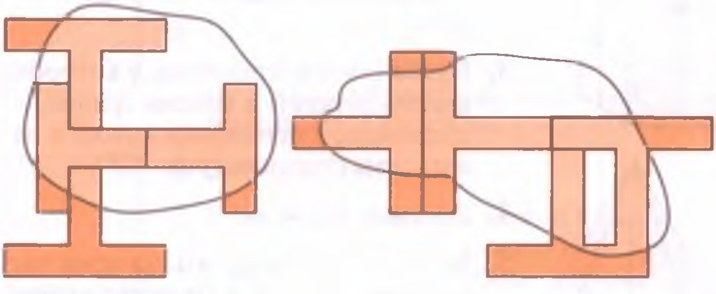


Рис. 328

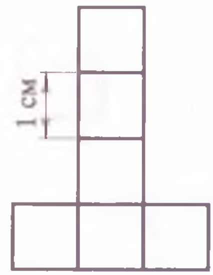


Рис. 329

5. Куб и его свойства

3. Развертками куба на рисунке 27 являются 1, 2, 4, 6—9.

5. Из данной развертки можно склеить куб *а*.

9. а) Кубы расположить так, как на рисунке 330. При этом образуется выемка в форме такого же куба. Поэтому, приложив линейку от точки *A* до точки *B*, можно измерить его диагональ.

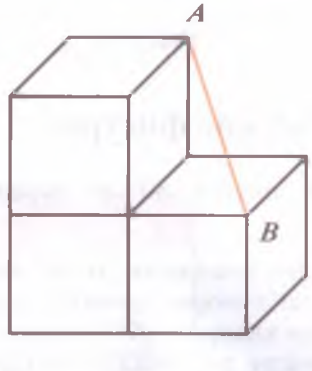


Рис. 330 *AB* — диагональ

б) Так как куб один, то полый куб, как в случае а), можно получить, если отметить на листе бумаги положение куба (обведя основание), а затем сдвинув его.

12. Расчертив полоску на семь квадратов, перегните второй и шестой квадраты по диагонали, а затем уже сворачивайте полоску в куб.

13. Тень — шестиугольник. Убедитесь в этом экспериментально.

14. Шесть распилов.

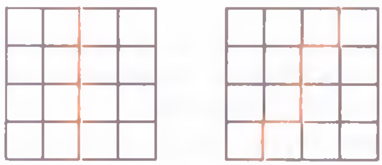
15. В решении этой задачи поможет развертка куба. Сделайте ее и отметьте точками местонахождение паука и мухи. Кратчайшее расстояние укажет прямая, соединяющая эти точки. Интересно, что кратчайший путь от паука к мухе можно выбрать шестью разными способами. Каждый из них проходит через середину одного ребра куба, соединяющего свободные вершины.

6. Задачи на разрезание и складывание фигур

1. Рисунок 331.

2. Рисунок 332.

3. Рисунок 333.



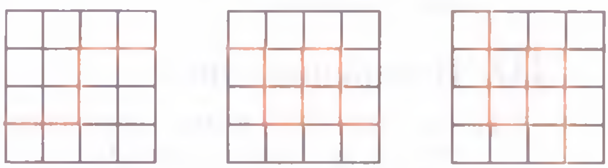


Рис. 331

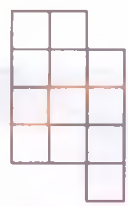


Рис. 332

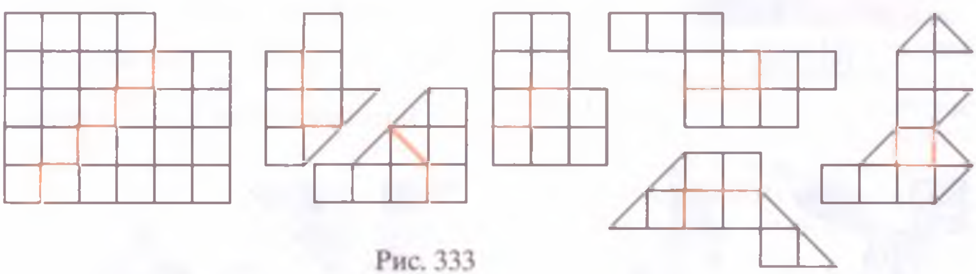
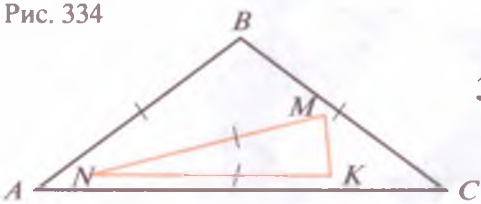


Рис. 333

7. Треугольник

1. Геометрическая теория утверждает, что сумма углов треугольника равна 180°. Конечно, в результате измерения во всех случаях сумма углов вряд ли будет равной 180°. Но достаточно близкой к 180° она должна быть.

Рис. 334



3. Если взять один треугольник с большим основанием, а другой — с очень маленьким, то можно (рис. 334).

5. Пронумеруем вершины тетраэдра числами 1, 2, 3, 4. После каждого перекатывания появляется вершина с номером, которого не было на предыдущем треугольнике.

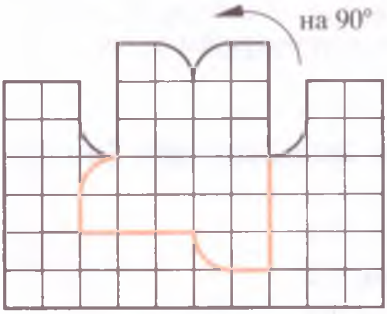


Рис. 335

Рис. 336

9. Геометрические головоломки

1. Рисунок 335.

2. Рисунок 336.

3. Рисунок 337.

4. Похожие фигурки на рисунке 67 просто составлены по-разному из всех кусочков танграма.

6. Составить треугольник из шести фигур нельзя.

10. Измерение длины

1. Так как 8,1 ялима составляют 10,8 км, то 1 ялим равен $10{,}8 : 8{,}1 = \frac{4}{3}$ км. Чтобы перевести расстояние из ялимов в километры, надо соответствующее число умножить на $\frac{4}{3}$.

В нашем случае $3{,}6 \times \frac{4}{3} = 4{,}8$ км.

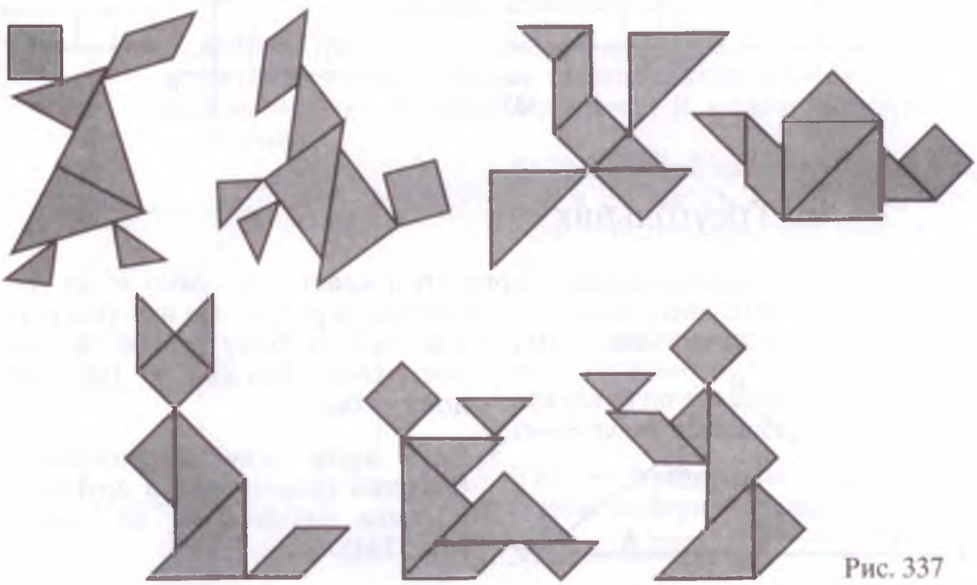


Рис. 337

11. Измерение площади и объема

1. 1 км^2 = 1 000 000 000 000 мм^2;
1 кв. верста = 2 250 000 кв. аршин;
1 кв. ярд = 9 кв. футов = 1296 кв. дюймов;
1 кв. миля ≈ 3,43 км^2;
1 км^3 = 1 000 000 000 000 000 см^3;
1 куб. сажень = 48 × 48 × 48 куб. вершков =
= 110 592 куб. вершка;
1 аршин ≈ $2\frac{1}{3}$ фута;
1 куб. аршин ≈ 12,7 куб. фута.

2. Треугольник со сторонами 7 см (рис. 338) «выложен» треугольными сантиметрами. Подсчитайте их число.

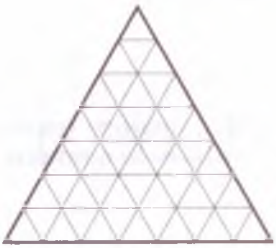


Рис. 338

Рис. 339

3. Рис. 339. Пирамида разделится на пять частей: четыре треугольные пирамиды и «внутренность» (многогранник с шестью вершинами, двенадцатью ребрами и восемью гранями) — октаэдр.

4. Чтобы измерить толщину бумажного листа, можно поступить следующим образом. Измерим толщину стопки бумаги, подсчитаем число листов в стопке и разделим первое число на второе. Можно предложить следующий способ измерения объема булыжника. Возьмем полное ведро воды, погрузим в нее булыжник: из ведра выльется вода, объем которой равен объему булыжника. Достанем из ведра булыжник и с помощью известной нам емкости (стакан, бутылка и др.) дольем ведро доверху.

12. Вычисление длины, площади и объема

2. Площади плоских фигур при увеличении их сторон в n раз увеличиваются в $n \times n$ раз.

3. Объемы тел при увеличении их ребер в n раз увеличиваются в $n \times n \times n$ раз.

4. Площадь всего белого квадрата равна 25 клеткам. От квадрата отрезаны четыре равных треугольника, площади ко-

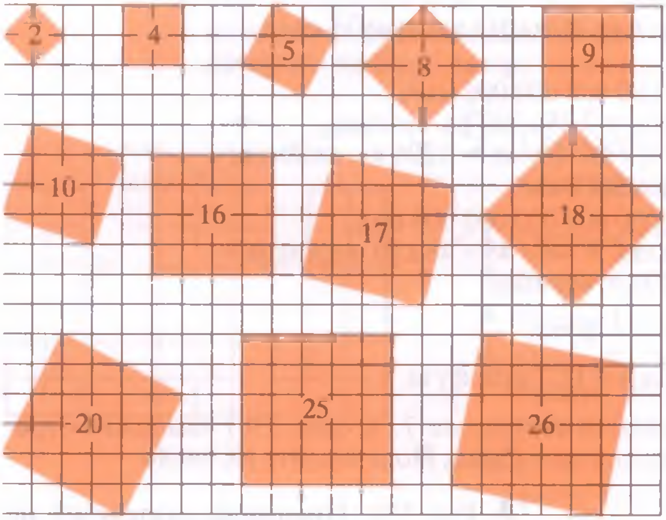


Рис. 340

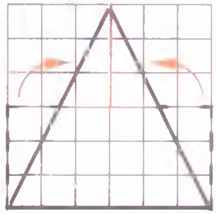


Рис. 341

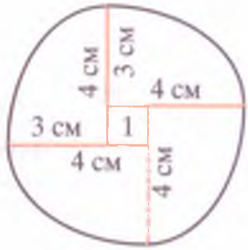


Рис. 342

торых в сумме составляют 12 клеток. Значит, площадь заштрихованного квадрата равна 25 – 12 = 13 клеткам.

5. Рисунок 340.

9. Рисунок 341.

10. Сложите из закрашенных и незакрашенных частей одинаковые фигуры.

11. Сложите из трех «внешних» треугольников один треугольник, равный «внутреннему».

14. Разделите фигуры на прямоугольники, найдите по формуле площади этих прямоугольников и результаты сложите.

15. Надо разрезать фигуру на четыре части и затем переложить их так, чтобы внутри образовался квадрат площадью 1 см^2 (рис. 342).

13. Окружность


Рис. 343

1. Сравните сторону квадрата с его диагональю. Квадратная крышка может провалиться в люк, чего никогда не случится с круглой крышкой.

2. Перегните круг вместе с листком.

3. Рисунок 343.

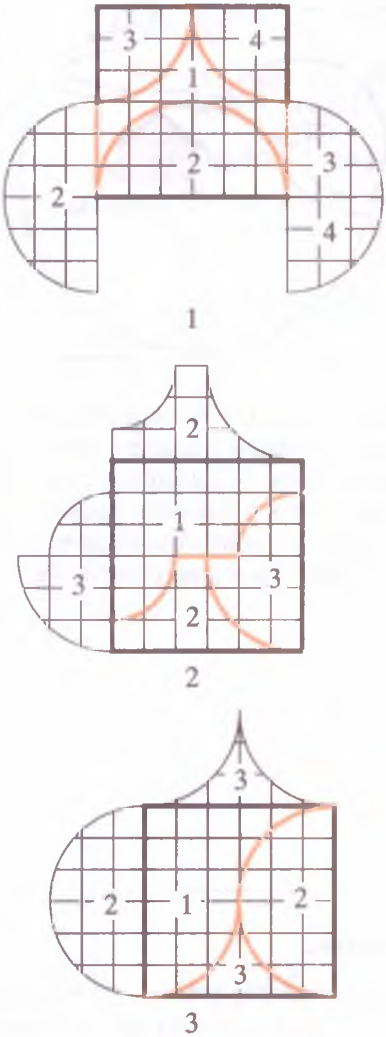


Рис. 344

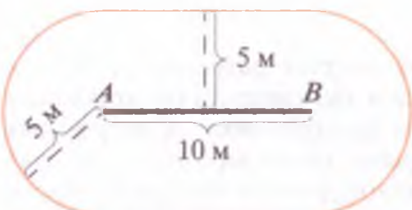


Рис. 345

5. Рисунок 344.

6. Катящийся пятак сделает два оборота. Проверьте это на опыте.

7. Проведите три луча из одной точки (городка) под одинаковыми углами друг к другу и впишите окружности разных радиусов в образовавшиеся углы.

8. Разрезав «кольцо» и сложив из него квадрат, увидим, что краски пойдет одинаковое количество (площади этих фигур равны).

10. Рисунок 345.

11. Привязав веревку к колышку на берегу, надо обойти озерцо. Веревка зацепится за колышек на островке, и по возвращении человека в исходную точку станет в два раза короче (как раз от *A* до *B*) и окажется натянутой между кольями. Остальное — дело ловкости человека.

12. Мысленно проследите, какие шестеренки вращаются по часовой стрелке, а какие — против. Если какая-то шестеренка вращается в одну сторону, то соседние — в другую. Система может вращаться лишь в том случае, если число шестеренок четное. В нашем же случае их 17.

13. В решении задачи вам поможет эксперимент. Возьмите две линейки и круглый карандаш. Одна линейка — платформа, карандаш — бревно. Вторая линейка нужна для измерения пути. Линейку положите на карандаш так, чтобы ее конец был в 5 см от карандаша, и двигайте «платформу». Вы можете убедиться, что, когда карандаш поравняется с концом линейки, линейка пройдет путь 10 см. А значит, наша платформа передвинется на 10 м.

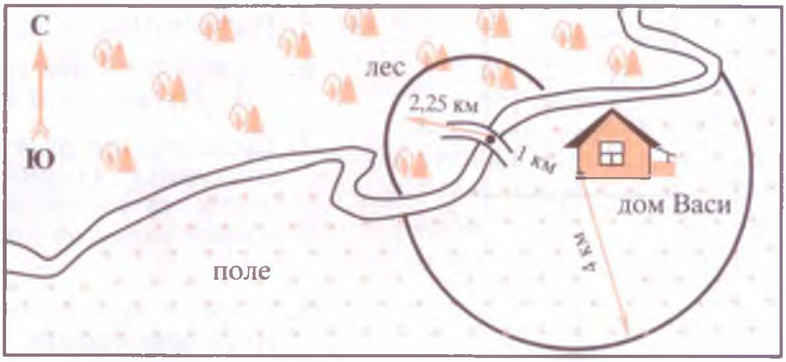


Рис. 346

14. Если бы Вася был, например, в поле и его скорость была 4 км/ч, то за 1 ч Вася мог бы отойти от начальной точки на 4 км. Направление движения он может выбирать сам, какое захочет. Поэтому точки, которых он может достичь за час, расположены на окружности с радиусом 4 км и центром в том месте, где Вася находится в начале пути. Решение задачи см. на рисунке 346.

14. Геометрический тренинг

1. 10 отрезков.

3. 8 четырехугольников.

4. 13 треугольников.

8. 20 квадратов.

9. 12 равносторонних треугольников.

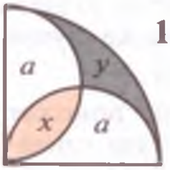


Рис. 347

11. Две половинки маленьких кружочков в сумме составляют четверть большого круга (рис. 347), так как радиус маленького круга в два раза меньше радиуса большого круга. Введем обозначения, как на рисунке, и составим уравнение:

$$2a + 2x = 2a + x + y.$$

Из этого уравнения видно, что площади частей x и y равны.

12. На рисунке 110, *а* большой квадрат разрезан на четыре прямоугольных треугольника и два квадрата со сторонами, равными меньшим сторонам треугольника. А на рисунке 110, *б* этот же квадрат разрезан на четыре таких же треугольника и квадрат со стороной, равной большей стороне треугольника. Значит, сумма площадей двух маленьких квадратиков (рис. 110, *а*) равна площади квадрата на рисунке 110, *б*. Именно это и утверждает теорема Пифагора.

15. Топологические опыты

1. На рисунке 348 изображен граф, соответствующий условию задачи. Обход надо начинать с *D* или *B*.
2. Постройте еще один мост, соединяющий *B* и *D*.
3. Ребра куба представляют собой пространственный граф. Подсчитайте в нем количество нечетных узлов, и вы сможете ответить на вопрос.
4. Рисунок 349, *а*, *б*.

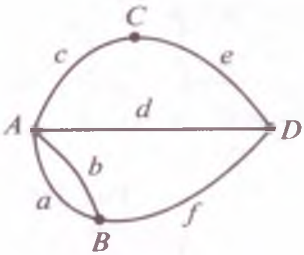


Рис. 348

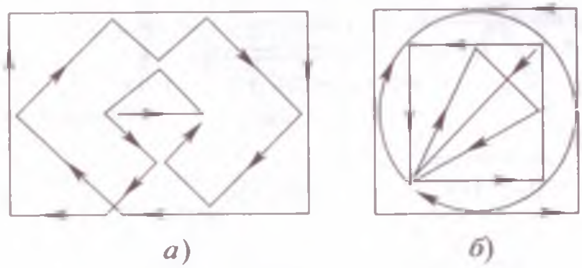


Рис. 349

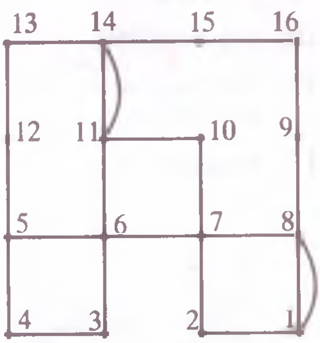


Рис. 350

5. Рисунок 350. Обход закончен в комнате 5.
6. Нарисуйте соответствующий граф и движение начните из нечетного узла.
7. Поставьте в каждой вершине графа число, равное количеству выходящих из него путей. Если мы сложим все эти числа, то получим четное число, так как каждый путь, соединяющий две вершины, считается дважды. Отсюда следует, что число нечетных вершин всегда четно.

16. Задачи со спичками

Рис. 351

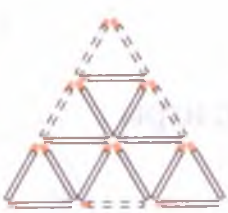


Рис. 352

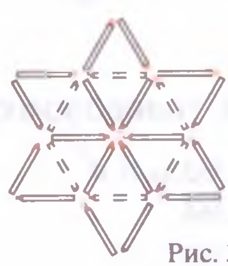
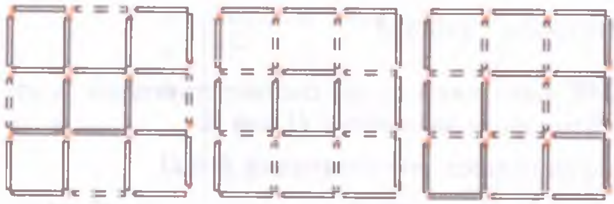


Рис. 353

1. Рисунок 351.
2. Рисунок 352.
3. Рисунок 353.



а) *б)* *в)*

Рис. 354

4. Рисунок 354, *а*, *б*, *в*.

5. Рисунок 355.

6. Рисунок 356.

7. Рисунок 357.

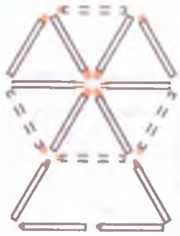


Рис. 355

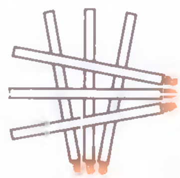


Рис. 356

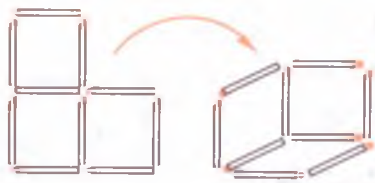


Рис. 357

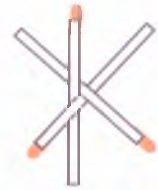


Рис. 358

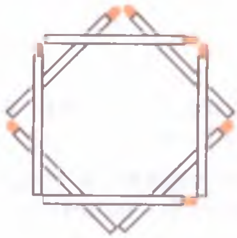


Рис. 359

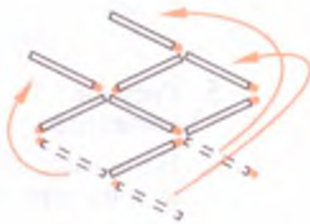


Рис. 360

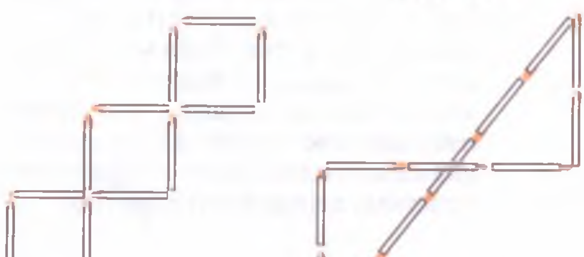
8. Рисунок 358.

9. Рисунок 359.

10. Рисунок 360.

11. Два варианта: рисунок 361, *а*, *б*.

12. Рисунок 362.



а) *б)*

Рис. 361

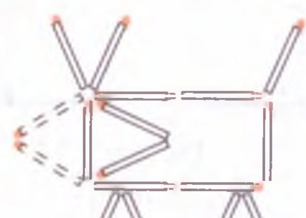


Рис. 362

18. Задачи, головоломки, игры

1. Рисунок 363, *а*, *б*, *в*.

2. Рисунок 364.

3. Рисунок 365.

а) *б)* *в)*

Рис. 363

Рис. 364

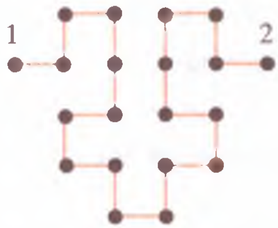


Рис. 365

6. Рисунок 366.

8. Подсказка: если нужно попасть во двор, ограниченный забором, то, перемахнув через забор один раз, ты окажешься внутри двора, а дважды — вне этого двора.

9. Рисунок 367.

10. 72 способами.

11. Рисунок 368.

12. Рисунок 369.

13. Рисунок 370.

14. Рисунок 371.

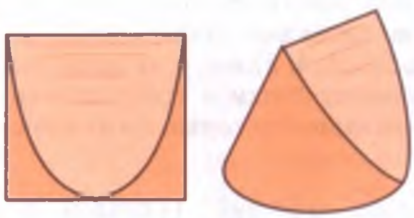


Рис. 366

Рис. 367

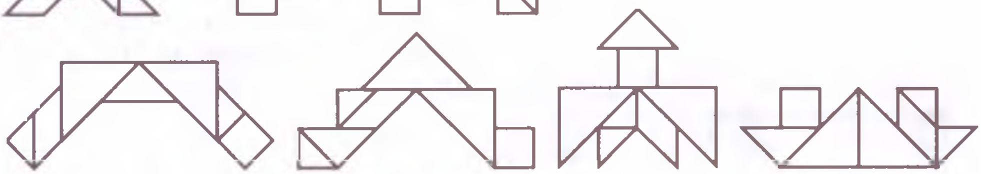


Рис. 368

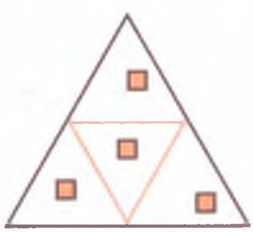


Рис. 369

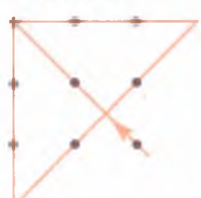


Рис. 370

Рис. 371

15. Рисунок 372, *а*, *б*, *в*.

16. Рисунок 373.

17. Круг диаметром 6 см сможет пройти в вырезанное на бумаге отверстие диаметром 4 см, если бумагу сложить вдвое по диаметру отверстия и растянуть края разреза в стороны, слегка деформируя (сминая) бумагу.

18. Последовательность укладки: 2; 7; 5; 6; 1; 3; 4.

19. Способ *а*) приведет к третьему результату, способ *б*) — ко второму.

21. Один из вариантов показан на рисунке 374.

22. Для облегчения решения пронумеруйте точки и запишите все 12 возможных равносторонних треугольников тройками чисел: (1; 2; 3), (2; 3; 5), (2; 4; 5) и т. д. А затем вычеркивайте точки и треугольники, содержащие эти точки, по их номерам.

23. Порядок действий: 1) правой рукой делаем перекрещенную петлю посередине веревки и держим ее; 2) левую руку вдеваем в петлю, как бы завязывая узел так, чтобы «браслет» на левой руке оказался внутри петли; 3) пропускаем петлю под «браслетом» и вытягиваем ее из-под него; 4) левую руку вынимаем из этой петли, отпускаем веревку и растягиваем ее. Получаем узел.

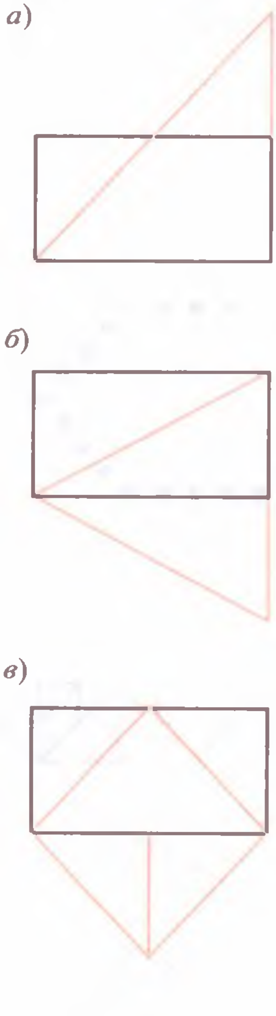


Рис. 372

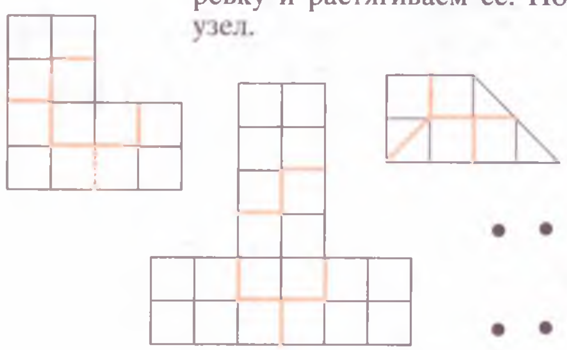


Рис. 373

Рис. 374

24. Басня И. А. Крылова «Ворона и Лисица»; «Ворона каркнула во все воронье горло».

25. Винни-Пух на дереве. Вид спереди.

26. Поскольку на рисунке не видны автобусные двери (они находятся на невидимой для нас стороне автобуса), автобус едет влево, т. е. в Москву.

27. а) Куб; б) конус; в) пирамида; г) параллелепипед; д) треугольная пирамида со срезанной вершиной — усеченная пирамида; е) усеченная пирамида; ж) четырехугольная пирамида.

28. Рисунок 375.

30. 4 и 15.

33. После обхода контура спичка повернута на 180°.

34. Если соединить левый и правый домики с колодцем, навесом и погребом, то средний домик окажется в одной из трех образовавшихся областей (рис. 376). Это значит, что из среднего домика невозможно без пересечения «границы» области попасть либо к навесу (если домик в первой области), либо к погребу (если домик во второй области), либо к колодцу.

35. Условно замените краски числами 1, 2, 3 и начните нумеровать кружочки (с любого), соблюдая условие задачи (два соседних кружка не должны быть одинаково занумерованы). Что получается?

36. Сабля не сможет войти в ножны.

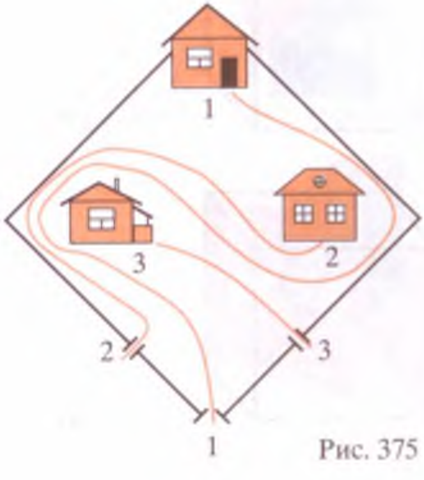


Рис. 375

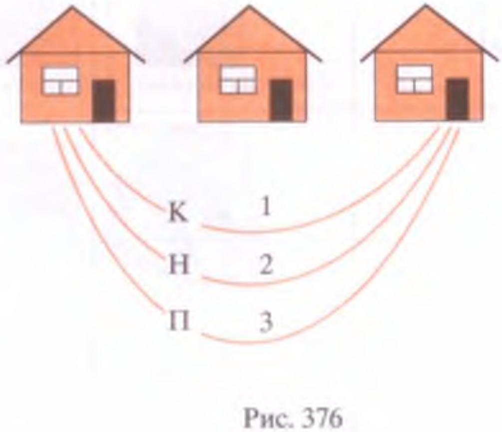


Рис. 376

19. Фигурки из кубиков и их частей

1. В пунктах *в*, *д*, *е* — один и тот же объект; *а*, *б*, *г*, *ж* — разные.

2. Рисунок 377.

3. Рисунок 378.

4. 1 В, 2 А, 3 Г, 4 Ж, 5 Е, 6 Б, 7 З, 8 Д.

6. Рисунок 379.

7. Плоскость должна проходить параллельно грани куба.

8. В сечении получается прямоугольник, две стороны которого равны ребрам куба, а две другие — диагоналям граней (рис. 380).

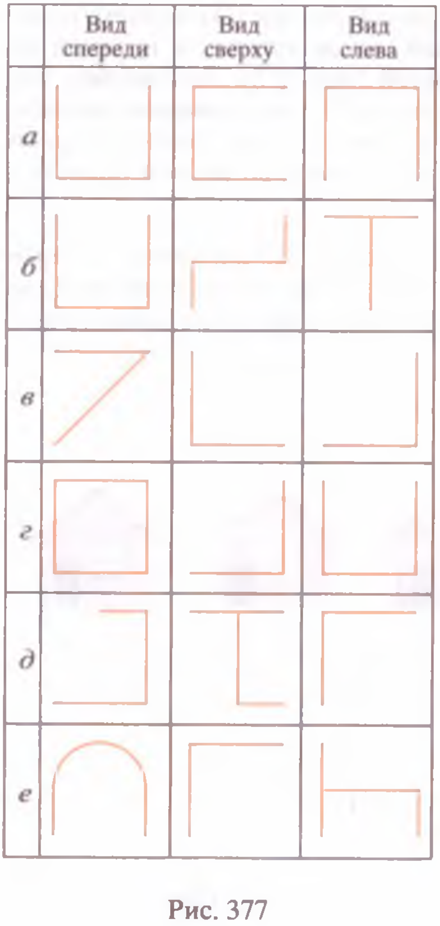


Рис. 377

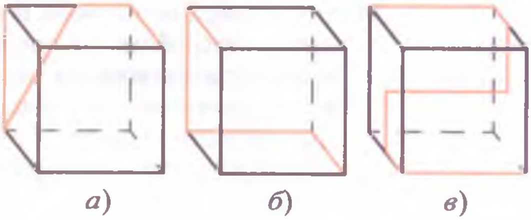


Рис. 378

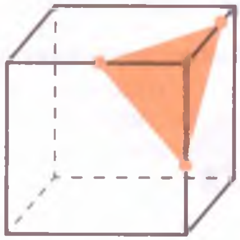


Рис. 379

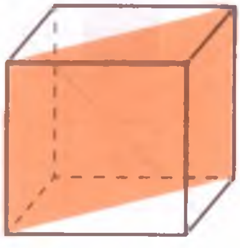
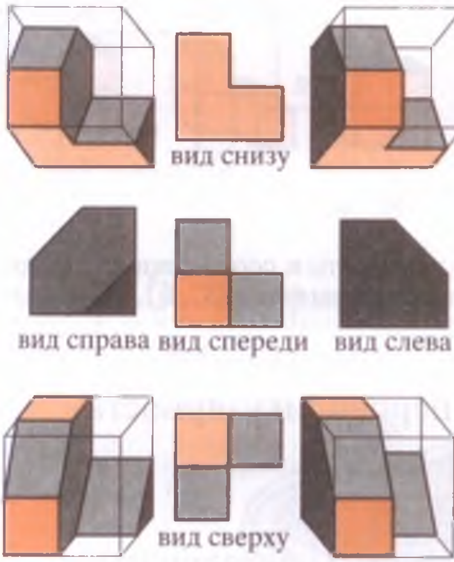
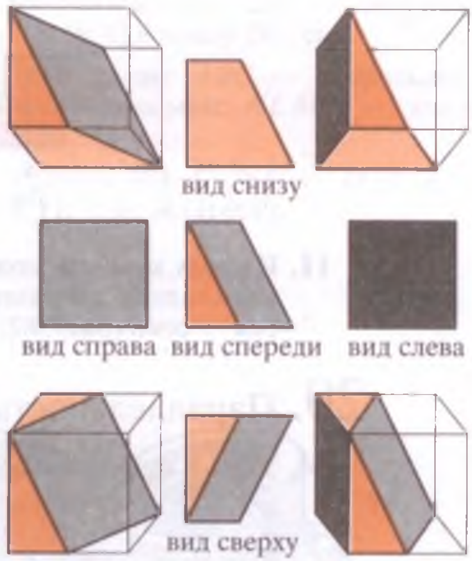


Рис. 380

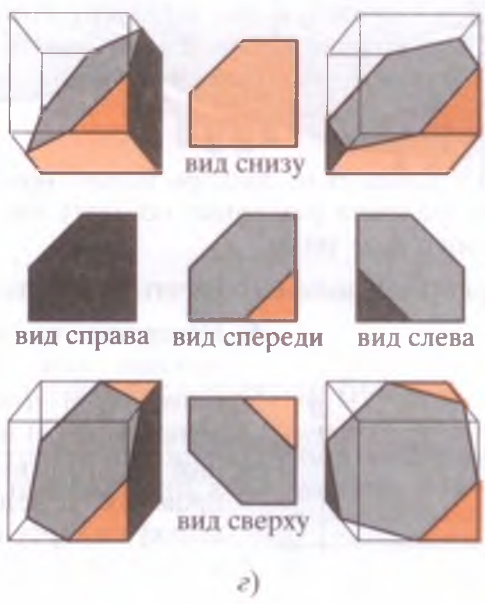
10. Рисунок 381.



б)



в)



г)

Рис. 381

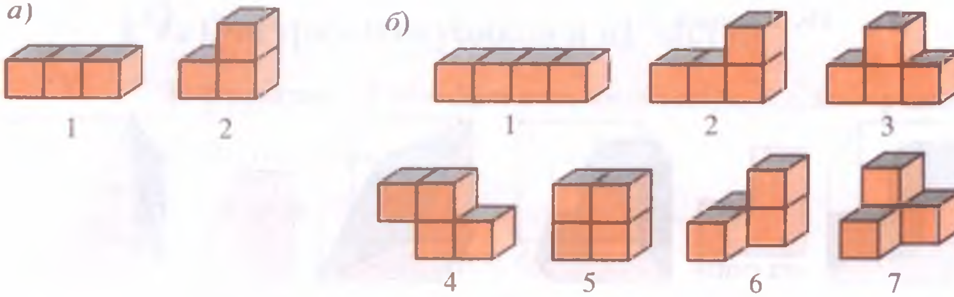


Рис. 382

11. Из трех кубиков можно построить в соответствии с условием задачи две различные фигуры (рис. 382, *а*), а из четырех — семь (рис. 382, *б*).

20. Параллельность и перпендикулярность

4. Углы 1, 4, 5, 7 равны; углы 2, 3, 6, 8 равны.

22. Координаты, координаты, координаты...

2. На доске 10×10 может разместиться 25 катеров: игровое поле можно разбить на квадраты 2×2, которых будет ровно 25, и в каждом из них по катеру. Но в каждом квадрате 2×2 только один катер, иначе у него будут «соседи», значит, 26 катеров на поле 10×10 уже не поместятся.

3. 26 выстрелов.

4. Доску разрезать на линкоры нельзя: при указанной окраске в четыре цвета различных по цвету квадратов получается неодинаковое число.

5. На рисунках должны получиться Буратино и бабочка.

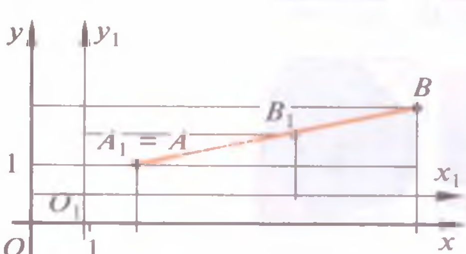


Рис. 383

6. Начертим на кальке вспомогательные оси координат $x_1O_1y_1$ (рис. 383). В этой системе отметим точки A_1 (2; 1) и B_1 (8; 2) и соединим их отрезком. На карте также проведем отрезок AB. Наложим кальку на карту так, чтобы точки A и A_1 совпали и отрезок A_1B_1 «пошел» по AB. Найдем, во сколько раз отрезок AB больше отрезка A_1B_1 и, увеличив единичный отре-

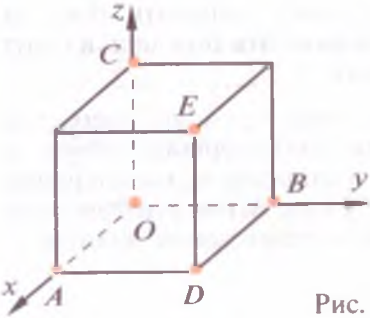


Рис. 384

зок во столько же раз, отодвинем вспомогательные оси. Получаем нужную систему координат xOy и находим место клада по координатам (6; 6) в новой системе.

8. Треугольник ABC — правильный, четырехугольник $KLMN$ — квадрат.

9. Рисунок 384; C (0; 0; 1); O (0; 0; 0); E (1; 1; 1); A (1; 0; 0).

26. Лабиринты

7. Рисунок 385.

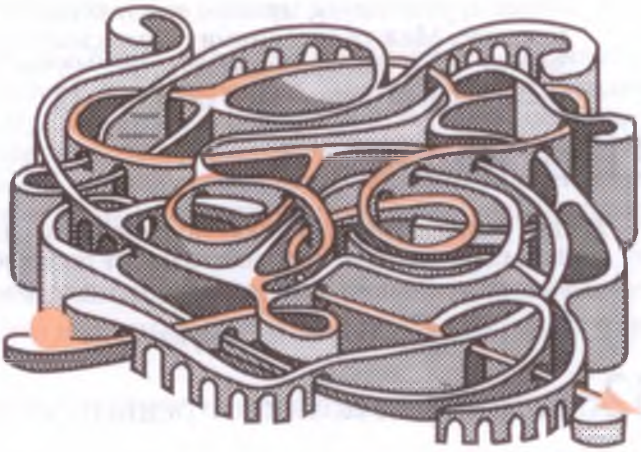


Рис. 385

27. Геометрия клетчатой бумаги

2. Достройте отрезок до прямоугольного треугольника и затем поверните его, как в задаче 1.

3. Три раза нужно выполнить построение перпендикуляра к отрезку, как в задаче 2, б).

4. Возьмите две точки на прямой CD и постройте прямоугольный треугольник с вершинами в этих точках. А затем — такой же треугольник с вершиной в точке A.

5. Равнобедренный треугольник можно сложить пополам так, чтобы половинки совместились. Эти половинки будут прямоугольными треугольниками.

7. Нужно описать около треугольника прямоугольник, т. е. начертить такой прямоугольник, чтобы вершины треугольника лежали на его сторонах, а стороны прямоугольника шли по сторонам клеточек на бумаге. Затем считаем количество клеток в прямоугольнике и отбрасываем лишние.

29. Симметрия

1. Угол равен 90°.

2. Пусть m и n — оси симметрии. Отражаясь от оси n, ось m перейдет в некоторую прямую m_1, тоже являющуюся осью симметрии и пересекающуюся с n под углом 15°. Так, отражаясь друг от друга, прямые m и n вернутся в исходное положение. Между соседними осями симметрии углы по 15°. Значит, осей симметрии всего 180° : 15° = 12. Наименьшее число вершин равно числу осей, т. е. 12.

31. Орнаменты

1. Два равных треугольника, положенных рядом определенным образом (рис. 386), составляют параллелограмм. А параллелограммами можно замостить плоскость.

2. Один из примеров — на рисунке 387.

32. Симметрия помогает решать задачи

2. Так как окружность симметрична относительно любого своего диаметра, то она симметрична и относительно диаметра MN, перпендикулярного прямым AA_1 и BB_1; точка A симметрична A_1, точка B симметрична B_1. Значит, все точки дуги AB симметричны точкам дуги A_1B_1, т. е. дуги AB и A_1B_1 равны (рис. 388).

Рис. 386

Рис. 387

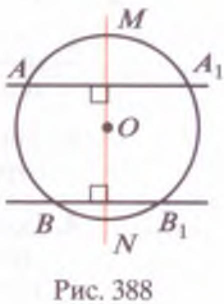


Рис. 388

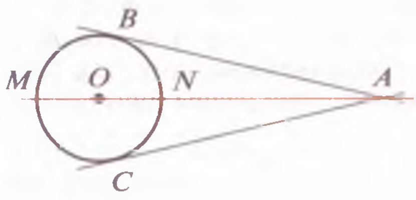


Рис. 389

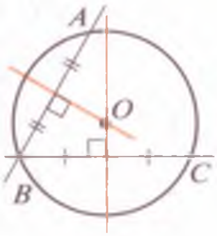


Рис. 390

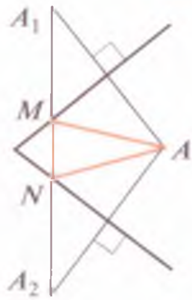


Рис. 391

3. Проведем прямую OA. На ней лежит диаметр, относительно которого окружность симметрична. Касательная AB симметрична касательной AC. Точки B и C окружности симметричны. Значит, и отрезки AB и AC симметричны, а следовательно, равны (рис. 389).

4. Точки B и C симметричны относительно диаметра, проходящего через середину отрезка BC и перпендикулярного ему. Аналогично и точки A и B. Таким образом, построив перпендикулярные прямые через середины к отрезкам AB и BC, мы получим точку их пересечения. Это центр окружности, так как через нее проходят оба диаметра (рис. 390).

5. Надо построить точки A_1 и A_2, симметричные точке A относительно сторон угла. Прямая A_1A_2 пересечет стороны угла в искомых точках M и N. Объясните это (рис. 391).

33. Одно важное свойство окружности

2. Строим окружность с центром O вне нашей прямой, проходящей через A. Через B (вторую точку пересечения этой окружности с прямой l) проводим диаметр BC. Тогда AC — перпендикуляр к прямой l (рис. 392).

3. $\angle AMC = 90°$, $\angle AMD = 45°$, $\angle BMC = 135°$.

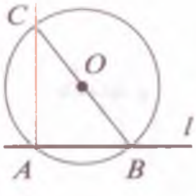


Рис. 392

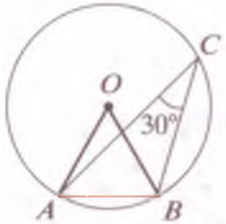


Рис. 393

4. $\angle AMB = 120°$.

5. $\angle ADC = 140°$.

6. Угол AOB в 2 раза больше угла ACB. Значит, угол $AOB = 60°$. Треугольник AOB — равнобедренный, один из углов равен 60°. Значит, все углы по 60°. А из этого следует, что этот треугольник является равносторонним, $AB = AO = 1$ (рис. 393).

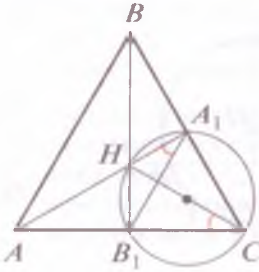


Рис. 394

7. Как мы знаем, окружность с диаметром CH проходит через A_1 и B_1. В этой окружности углы HA_1B_1 и HCB_1 опираются на одну дугу. Следовательно, они равны (рис. 394).

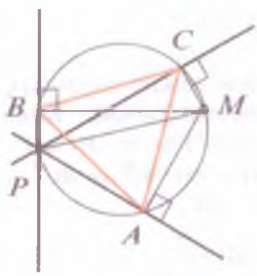


Рис. 395

8. Пусть все три прямые проходят через точку P, а M — некоторая точка плоскости. A, B, C — основания перпендикуляров, опущенных из M на данные прямые. Все пять точек (P, M, A, B, C) лежат на одной окружности с диаметром PM. Значит, угол ABC равен углу APC, так как эти углы опираются на одну дугу окружности, т. е. угол ABC = $= 60°$. Точно так же покажем, что остальные углы треугольника ABC равны 60° (рис. 395).

34. Задачи, головоломки, игры

1. 8 граней, если карандаш не заточен.

2. Можно раскрыть три звена одной цепи, а потом этими звеньями соединить четыре оставшихся куска.

3. Если перегнуть круг так, чтобы половинки совпали, то линия сгиба пройдет через центр. Проделав эту операцию дважды, найдем центр круга.

4. Если в листе сделать разрез, как на рисунке 396 (сплошная линия), то после этого лист можно растянуть наподобие длинной ленты. Сделав в этой ленте разрез посередине (пунктирная линия), получим достаточно большое отверстие.

5. На рисунке 397 показано, как можно защитить одну и две башни.

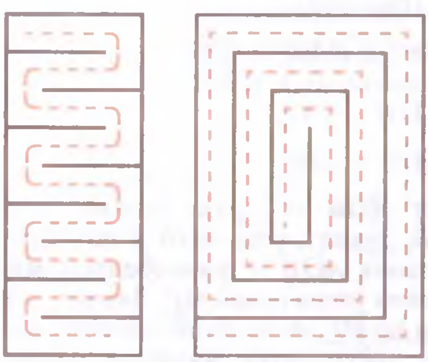


Рис. 396

Рис. 397

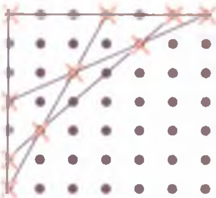


Рис. 398

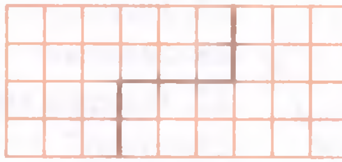


Рис. 399

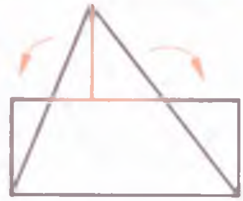


Рис. 400

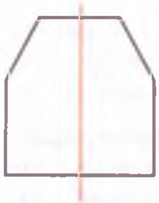


Рис. 401

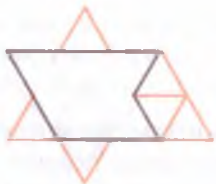


Рис. 402

Рис. 403

6. Рисунок 398. Оставить надо деревья, отмеченные крестиком.

8. Рисунок 399. Получится квадрат со стороной 6 единиц.

9. Рисунок 400.

10. Рисунок 401.

11. Рисунок 402.

12. Рисунок 403.

15. Рисунок 404.

16. Рисунок 405, *а*, *б*.

Рис. 404

17. После каждого разреза число частей может возрасти не больше чем в два раза. Сначала был один куб. После первого разреза он распадается на две части, после второго — не более чем на четыре. Затем число частей может быть 8, 16, 32 и 64. Значит, число разрезов не может быть меньше 6. Приведите способ, с помощью которого куб можно разрезать на 64 части за шесть разрезов.

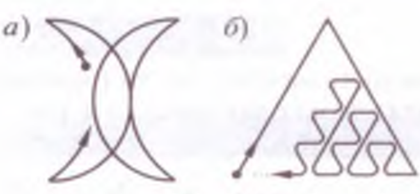


Рис. 405

18. Первый рисунок.

19. 10 км.

20. Рисунок 406.

21. а) Рисунок 407, *а*; б) рисунок 407, *б*; в) сложите из спичек куб.

22. Рисунок 408.

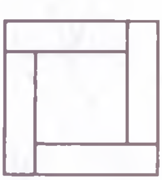


Рис. 406

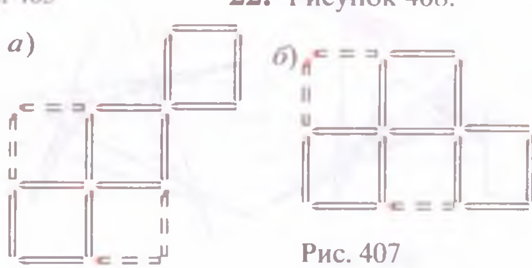


Рис. 407

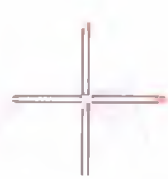


Рис. 408

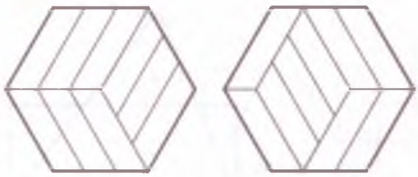


Рис. 409

23. Рисунок 409.

25. 22 клетки.

27. Развертка куба 5.

28. *а*) и *в*).

29. 15 правильных треугольников. Можно убрать четыре точки (рис. 410).

30. Первая страница первого тома и последняя страница третьего тома примыкают ко второму тому. Так что путь червяка равен толщине второго тома, т. е. составляет 3,5 см.

Рис. 410

31. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке в черный и белый цвета. Если бы доска была полной, то черных и белых клеток было по 32. На данной доске (если левый нижний угол черный) черных 32 клетки, а белых 30. Но каждая кость домино закрывает одну черную и одну белую клетку. Так что данную доску покрыть фишками нельзя.

32. Чтобы получить такой треугольник, надо взять стороны такими, чтобы сумма двух сторон мало отличалась от третьей стороны.

33. На рисунке 411 показано, как при пересечении двух четырехугольников могут образоваться два четырехугольника, три четырехугольника и даже четыре четырехугольника.

35. Не обязательно. Возьмем, например, два треугольника: стороны первого 27, 36, 48, а второго 36, 48, 64. Поскольку второй треугольник получается из первого увеличением каждой стороны в $\frac{3}{4}$ раза, то треугольники имеют равные углы.

36. Рисунок 412.

37. Три прямые разбивают плоскость на семь частей (прямые не параллельны и не проходят через одну точку); см. рисунок 413. Проведем четвертую прямую. Она пересечется

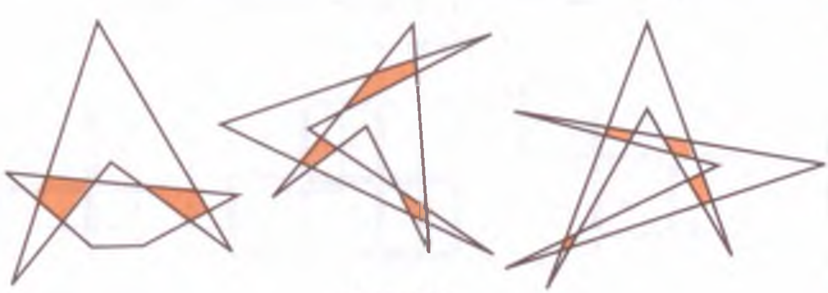


Рис. 411

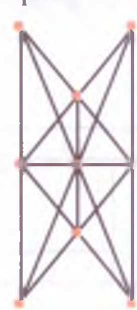


Рис. 412

с тремя предыдущими в трех точках. Эти точки разобьют четвертую прямую на четыре куска. Соответственно добавятся и четыре куска плоскости. Четыре прямые разобьют плоскость на $7 + 4 = 11$ частей. Добавим пятую прямую. На ней образуется пять кусков и добавится пять кусков плоскости. Таким образом, пять прямых разобьют плоскость на $7 + 4 + 5 = 16$ частей. Для шести прямых число частей составит $16 + 6 = 22$.

Рис. 413

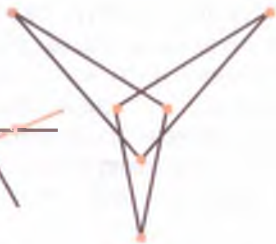


Рис. 414

38. *а, в, е*; *б, г, д*.

39. 120 см.

40. Если мы нарисуем прямой угол с вершиной на окружности, то прямая, соединяющая точки пересечения его сторон с окружностью, проходит через ее центр. Две такие прямые определят центр.

41. Рисунок 414.

42. На каждой «петле» таких точек будет четное число, а значит, и всего точек пересечения четное число.

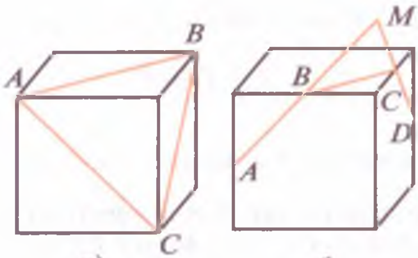
43. а) 60°, рис. 415, *а*; б) 120°, рисунок 415, *б*.

45. Рисунок 416, *а*, *б*.

46. Из двух таких треугольников можно составить правильный треугольник (рис. 417).

47. Вымащиваем сначала полоску (рис. 418), а затем всю плоскость.

48. Через каждую из трех точек надо провести прямую, параллельную прямой, проходящей через две другие точки.



а) *б)*

Рис. 415

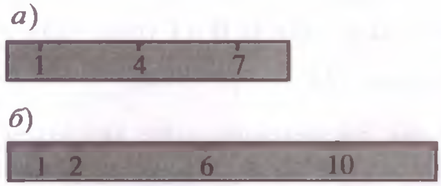


Рис. 416

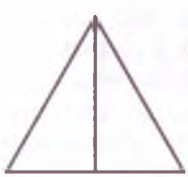
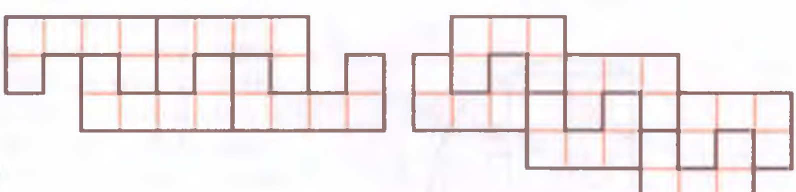


Рис. 417



а) *б)*

Рис. 418

49. Рисунок 419, *а*, *б*.

50. а) Рисунок 420; б) возьмем центр окружности, проходящей через вершины треугольника, и соединим его с вершинами. Треугольник будет разделен на три равнобедренных треугольника.

51. Постройте любую окружность, касающуюся прямых, проведите через точку *A* прямую, параллельную данным. Она пересечет построенную окружность в точках *B* и *C*. Передвиньте центр построенной окружности на *AB* или *AC* (рис. 421).

Рис. 419

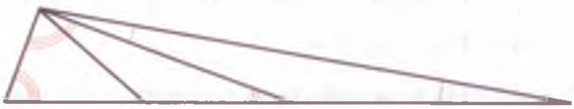


Рис. 420

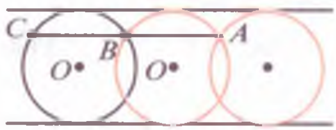


Рис. 421

52. а) Рисунок 422, *а*; б) рисунок 422, *б*.

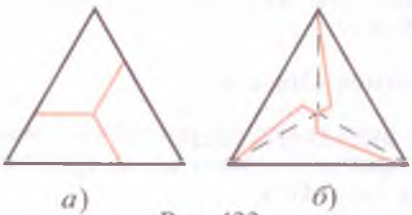


Рис. 422

53. Прямоугольники А и Б имеют равные площади. Это следует из того, что диагональ делит прямоугольник на равные треугольники. Значит, суммарная площадь А, В и Г равна площади Б, В и Г (рис. 423).

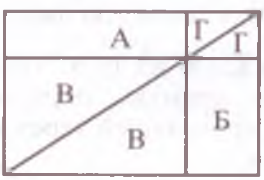


Рис. 423

54. Рисунок 424.

Рис. 424

55. Будем последовательно двигаться из А и ставить в каждом узле число, равное количеству способов, какими можно попасть в этот узел. Тогда число в каждом следующем узле равно сумме чисел предшествующих узлов (тех, из которых попадаем в этот узел за один переход). В результате в точке Б получим число 100. Столькими способами можно попасть из А в Б (рис. 425).

56. Рисунок 426.

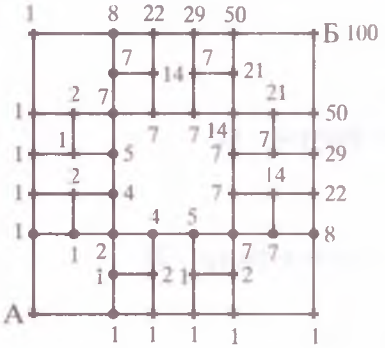


Рис. 425

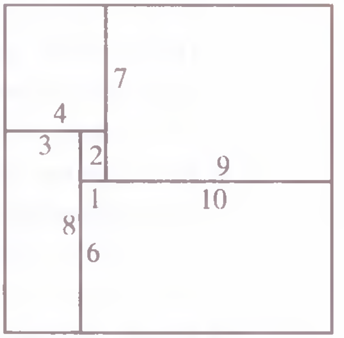


Рис. 426

57. Нижний слой остается заполненным, а второй и третий слои, как на рисунках 427, *а*. Вид системы кубиков в этих случаях, как на рисунке 427, *б*.

58. На втором рисунке диагональ на самом деле представляет очень узкий четырехугольник площадью 1. Если приложить друг к другу получившиеся после разрезания четырехугольник и треугольник, то соответствующие стороны не лежат на одной прямой.

59. Рисунок 428. Числа 1, 2, 3, 4 — номера цветов.

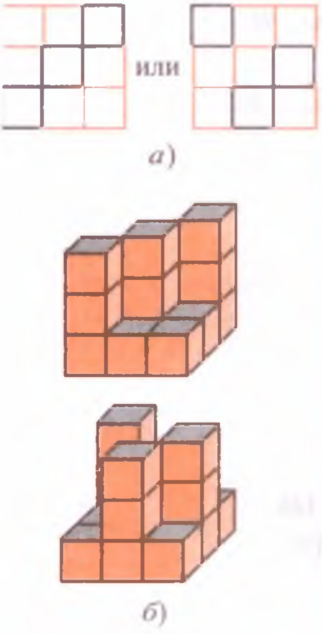


Рис. 427

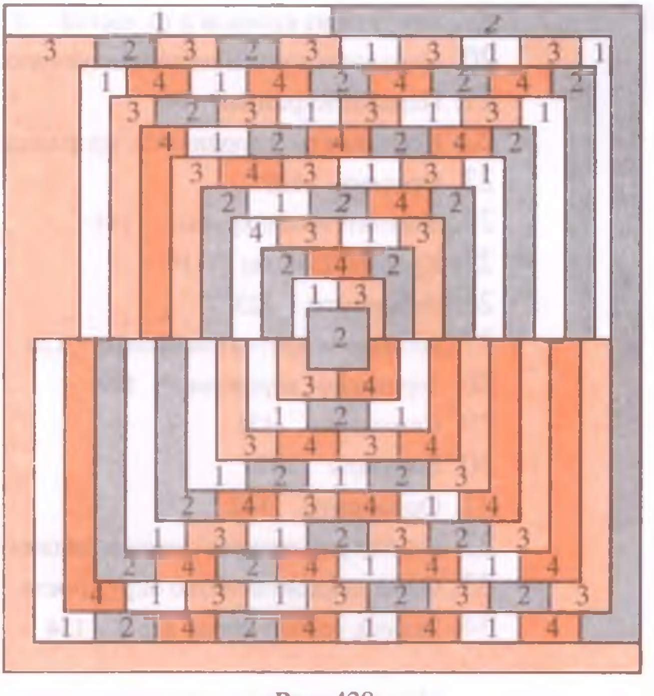
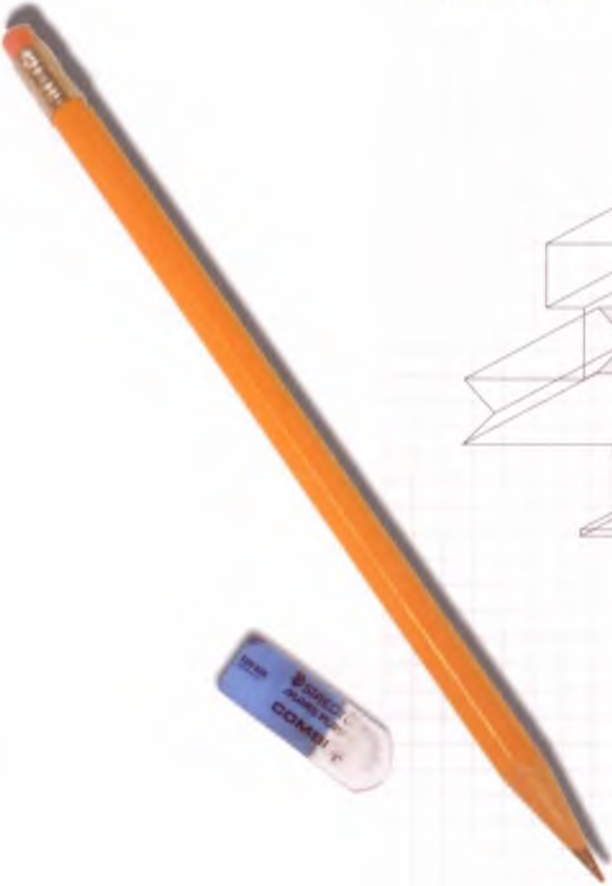


Рис. 428

Оглавление

дрофа



ISBN 978-5-358-15038-6

К учебнику разработано электронное приложение